XI.- TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONVECCIÓN
FLUJO EN CONDUCTOS

pfernandezdiez.es

XI.1.- FLUJO ISOTÉRMICO EN CONDUCTOS CIRCULARES

En un flujo laminar la corriente es relativamente lenta y no es perturbada por las posibles protuberancias del contorno, mientras que la viscosidad es relativamente grande, de forma que si por cualquier circunstancia se iniciase un fenómeno de turbulencia, la viscosidad lo destruiría.

La formulación que a continuación se desarrolla sirve tanto para tuberías lisas como para tuberías rugosas, suponiendo que las partículas de fluido, en un flujo laminar a lo largo de un tubo, se mueven en capas cilíndricas coaxiales; en el eje del tubo, el desplazamiento se realiza a mayor velocidad, mientras que en las paredes permanece en reposo.

La distribución de velocidades en una sección transversal cualquiera del tubo obedece a las fuerzas de rozamiento transmitidas de capa en capa.

Región de entrada.- La fricción y la velocidad de transferencia de calor son, por regla general. mayores en la región cercana a la entrada de un tubo que en una región lejana aguas abajo, donde los perfiles de velocidad y temperatura están totalmente desarrollados.

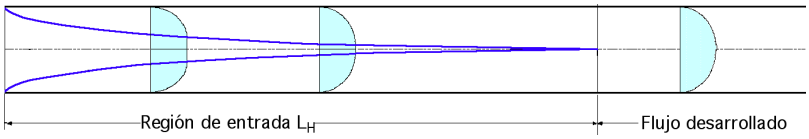


Fig XI.1.- Isotaquias de velocidades en la región de entrada

La longitud hidrodinámica de entrada L_H se define como la distancia que debe recorrer el fluido para que el coeficiente de rozamiento f disminuya a menos del 5% de su valor totalmente desarrollado. Si el flujo es laminar y si el fluido penetra en el tubo por una entrada lisa y redondeada, el perfil inicial de la velocidad es uniforme; la longitud requerida para que el perfil de velocidades

en flujo laminar sea invariante respecto a la posición axial, es la longitud de entrada hidrodinámica L_H que se puede aproximar por la ecuación de Langhaar:

$$L_H = 0{,}056\, Re_d\, d$$

siendo en la mayor parte de los casos despreciable, comparada con la longitud total.

También se puede definir una longitud térmica de entrada L_T que se define como la distancia necesaria para que el número de Nusselt decrezca a menos del 5% de su valor totalmente desarrollado. Si en $x = 0$ el flujo es laminar y está ya totalmente desarrollado hidrodinámicamente, si la temperatura de la pared es uniforme, se tiene que:

$$L_T = 0{,}017\, Re_d\, Pr\, d$$

y para un tubo de longitud L: $Nu_d = 3{,}66 + \dfrac{0{,}065\, \dfrac{d}{L}\, Re_d\, Pr}{1 + 0{,}04\, (\dfrac{d}{L}\, Re_d\, Pr)^{2/3}}$; $Re_d < 2300$

Región de flujo desarrollado hidrodinámicamente. Ecuación de Poiseuille.- Si se considera una parte del tubo, Fig XI.2, de diámetro $(2\,R)$ y un cilindro de fluido coaxial de diámetro $(2\,r)$ y longitud Δl, las condiciones de contorno implican que en su cara frontal la presión es p, y en la posterior la presión es (p - Δp), sobre el cilindro actuará una *fuerza de empuje* de la forma:

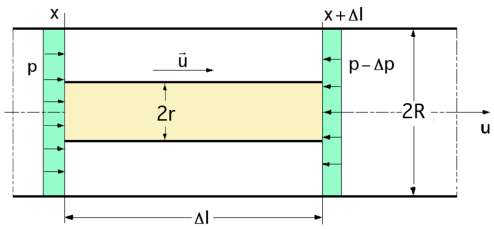


Fig XI.2.- Región de fluido desarrollado para la ecuación de Poiseuille

$$F_{emp} = \pi\, r^2 \Delta p$$

La fuerza de rozamiento

$$F_{roz} = \eta\, S\, \frac{du}{dr} = \left| S = 2\,\pi\, r\, \Delta l \right| = 2\,\pi\, \eta\, r\, \Delta l\, \frac{du}{dr}$$

es igual a la de empuje, por lo que:

$$2\,\pi\, \eta\, r\, \Delta l\, \frac{du}{dr} = \pi\, r^2 \Delta p \quad ; \quad \frac{du}{dr} = \frac{r\, \Delta p}{2\,\eta\, \Delta l} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\Delta p}{2\,\eta\, \Delta l} \int_r^R r\, dr = \frac{\Delta p}{4\,\eta\, \Delta l}\, (R^2 - r^2)$$

que es la distribución del campo de velocidades, de tipo parabólico, en un plano longitudinal.

El *caudal*

$$Q = \int_0^R u\, d\Omega = \int_0^R u\, 2\,\pi\, r\, dr = \frac{\Delta p}{4\,\eta\, \Delta l} \int_0^R (R^2 - r^2)\, 2\,\pi\, r\, dr = \frac{\pi\, R^4 \Delta p}{8\,\eta\, L}$$

es directamente proporcional a la variación de presión entre las secciones A y B, tramo de longitud $\Delta l = L$, a la cuarta potencia del radio de la conducción, e inversamente proporcional al tramo de tubería considerada de longitud L y a la viscosidad dinámica η.

El caudal en función de la velocidad media $\hat{u}_F = u_F$ es, $Q = \Omega\, u_F$, y la velocidad media se puede poner en la forma:

$$\hat{u}_F = u_F = \frac{Q}{\Omega} = \frac{\frac{\pi\ R^4 \Delta p}{8\ \eta\ L}}{\pi\ R^2} = \frac{R^2}{8\ \eta}\frac{\Delta p}{L}$$

La *velocidad máxima* se tiene para (r = 0), de la forma: $u_{máx} = \frac{R^2}{4\ \eta}\ \frac{\Delta p}{L}$

La relación entre la velocidad máxima y la velocidad media es: $u_{máx} = 2\ u_F$

Despejando el valor de Δp, se obtiene la ecuación de *Poiseuille*:

$$\Delta p = \frac{8\ \eta\ L\ u_F}{R^2} = \frac{32\ \eta\ L\ u_F}{d^2}$$

La pérdida de carga total Δp correspondiente a la longitud de tubería L se puede poner en función de la pérdida de carga por unidad de longitud de tubería J, en la forma:

$$\Delta p = \gamma\ \Delta h = \gamma\ J\ L$$

expresión que se puede poner teniendo en cuenta el número de Reynolds, y el coeficiente λ de rozamiento, en la forma:

$$J = \frac{1}{\gamma}\ \frac{\Delta p}{L} = \frac{1}{\rho\ g}\ \frac{32\ \eta\ u_F}{d^2} = \frac{64\ u_F^2}{2\ g\ d\ \ Re} = \frac{\lambda\ u_F^2}{2\ g\ d}$$

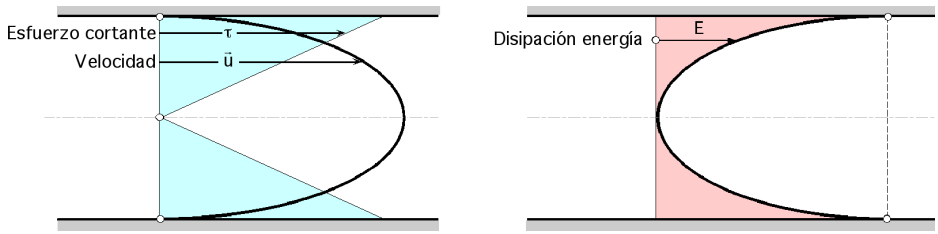


Fig XI.3.- Distribución del coeficiente de cortadura, y disipación de energía

Para el régimen laminar: $\lambda = \frac{64}{Re}$

La ecuación de Poiseuille demuestra que la pérdida de carga en régimen laminar, para tuberías lisas o rugosas, es directamente proporcional a la primera potencia de la velocidad.

En la Fig XI.3 se muestran las distribuciones correspondientes al coeficiente τ de cortadura, velocidad $\vec{u}_F$ y disipación de energía.

XI.2.- FLUJO EN CONDUCTOS NO CIRCULARES

Flujo laminar, incompresible y permanente, entre dos placas paralelas.- En primer lugar se puede suponer que las placas son inclinadas formando un ángulo q respecto a la horizontal, teniendo la placa superior una velocidad constante u_0; el flujo entre las dos placas fijas es un caso

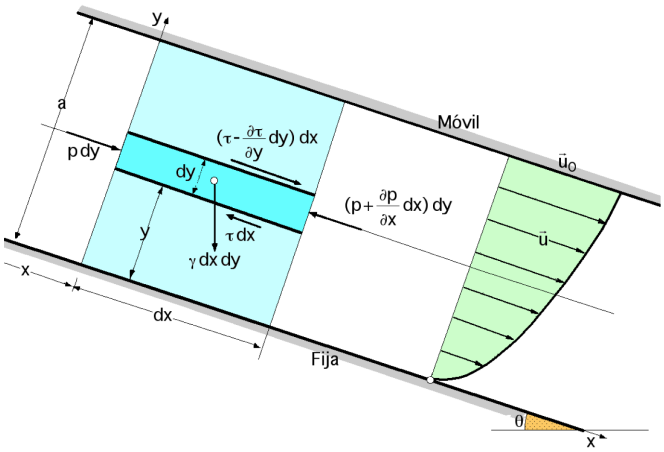


Fig XI.4.- Flujo laminar entre placas paralelas

particular, al hacer la velocidad de la placa móvil $u_0 = 0$. La placa superior se mueve paralelamente en la dirección del flujo, existiendo a lo largo del mismo, en la dirección de x, una variación de presión.

Si se toma un elemento de fluido en forma de lámina, Fig XI.4, de dimensiones (dx,dy), y anchura unidad, para un flujo permanente, la lámina se moverá con velocidad constante $\vec{u}$ siendo la ecuación del movimiento:

$$p\,dy - (p + \frac{\partial p}{\partial x}\,dx)\,dy - \tau\,dx + (\tau - \frac{\partial \tau}{\partial y}\,dy)\,dx + \gamma\,dx\,dy\,sen\,\theta = 0$$

que simplificada se reduce a:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y} + \gamma\,sen\,\theta = \left| sen\,\theta = -\frac{\partial h}{\partial x} \right| = \frac{\partial \tau}{\partial y} - \gamma\,\frac{\partial h}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma\,h)$$

Como no existe aceleración en la dirección y, el segundo miembro de esta ecuación no será función de y; integrándola se obtiene:

$$\tau = y\,\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma\,h) + C_1 = \eta\,\frac{du}{dy} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dy} = \dfrac{1}{\eta}\,y\,\dfrac{\partial}{\partial x}(p + \gamma\,h) + \dfrac{C_1}{\eta} \\ u = \dfrac{1}{\eta}\,\dfrac{\partial}{\partial x}(p + \gamma\,h)\,\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{C_1}{\eta}\,y + C_2 \end{cases}$$

Para calcular C_1 y C_2 utilizaremos las condiciones en los límites, de la forma:

$$Para, \begin{cases} y = 0\ ,\ u = 0 \\ y = a\ ,\ u = u_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$u_0 = \frac{1}{2\,\eta}\,\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma\,h)\,a^2 + \frac{C_1}{\eta}\,a \quad ; \quad \frac{C_1}{\eta} = \frac{u_0}{a} - \frac{a}{2\,\eta}\,\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma\,h)$$

$$u = \frac{1}{2\,\eta}\,\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma\,h)\,y^2 + \frac{u_0}{a}\,y - \frac{a}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma\,h)\,y = \frac{u_0}{a}\,y - \frac{1}{2\,\eta}\,\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma\,h)\,(a\,y - y^2)$$

El gasto a través de una sección transversal cualquiera, es:

$$Q = \int_0^a u\,dy = \frac{u_0\,a}{2} - \frac{1}{12\,\eta}\,\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma\,h)\,a^3$$

siendo la velocidad media entre placas:

$$\hat{u} = \frac{Q}{a} = \frac{u_0}{2} - \frac{1}{12\,\eta}\,\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma h)\,a^2$$

y el esfuerzo en la pared:

$$\tau = \eta \left.\frac{du}{dy}\right\rangle_{y=0}^{y=a} = \{ y \frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma h) + \eta \frac{u_0}{a} - \frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma h)\frac{a}{2} \}_{y=0}^{y=a} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\{(p + \gamma h)(y + \frac{a}{2})\}_{y=0}^{y=a} + \eta \frac{u_0}{a} = -\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma h)\frac{a}{2} + \eta \frac{u_0}{a}$$

que demuestra que dicho esfuerzo cortante en la pared, es constante.

XI.3.- FLUIDOS QUE CIRCULAN POR EL INTERIOR DE TUBERÍAS EN CONVECCIÓN FORZADA Y RÉGIMEN LAMINAR, CON FLUJO DE CALOR CONSTANTE

Vamos a considerar un flujo forzado laminar por el interior de un conducto de sección circular de radio R, sometido a un flujo de calor uniforme q desde una pared a T_{pF}, Fig XI.5. Si se toma un volumen de control anular de longitud dx y espesor dr, en la región donde los perfiles de velocidad y temperatura están completamente desarrollados, un balance de energía permite determinar la distribución de temperaturas en la forma:

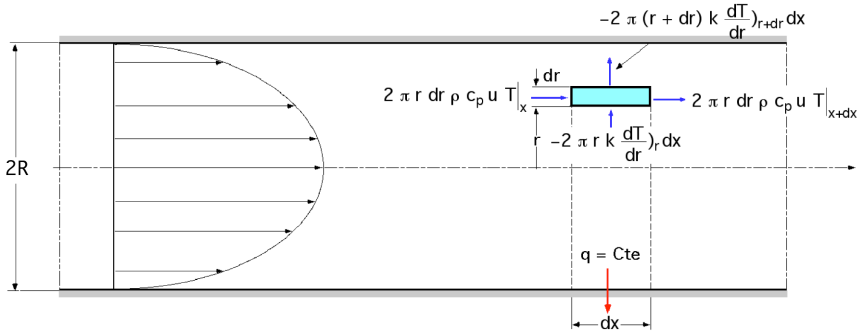


Fig XI.5.- Flujo forzado laminar con flujo de calor constante

Variación del flujo térmico en la dirección radial:

$$\begin{cases} \text{Entrada: } q_1 = -2\,\pi\, r\, k \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right)_r dx \\ \text{Salida: } q_2 = q_1 + \frac{\partial q_1}{\partial r} dr = q_1 - 2\,\pi\, k \frac{\partial}{\partial r}\left(r \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right)_r dx\, dr \end{cases}$$

Variación del flujo térmico en la dirección axial:

$$\begin{cases} \text{Entrada: } q_1^* = 2\,\pi\, r\, dr\, \rho\, c_p\, u\, T \\ \text{Salida: } q_2^* = q_1^* + \frac{\partial q_1^*}{\partial x} dx = q_1^* + 2\,\pi\, r\, \rho\, dr\, c_p\, u \frac{\partial T}{\partial x} dx \end{cases}$$

Ecuación de la energía:

$$-2\,\pi\, k \frac{\partial}{\partial r}\left(r \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right)_r dx\, dr + 2\,\pi\, r\, \rho\, dr\, c_p\, u \frac{\partial T}{\partial x} dx = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{r\, \rho\, c_p\, u}{k} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{r\, u}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x}$$

Como para la distribución de velocidades de tipo parabólico (Régimen laminar), se tiene:

$$\frac{u}{u_{máx}} = 1 - \frac{r^2}{R^2} \quad ; \quad u = u_{máx}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = 2\,V_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x}\{2\,V_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r\}$$

en la que para un flujo térmicamente desarrollado $\frac{\partial T}{\partial x} = Cte$.

Integrándola se obtiene la distribución de temperaturas:

$$r\,\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{2}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial x}\,V_0\,(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4\,R^2}) + C_1 \quad ; \quad dT = \{\frac{2}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial x}\,V_0\,(\frac{r}{2} - \frac{r^3}{4\,R^2}) + \frac{C_1}{r}\}\,dr$$

$$T = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial x}\,V_0\,(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16\,R^2}) + C_1\,\ln r + C_2$$

Las constantes de integración se calculan teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

a) Para, $r = 0$; $T = T_C$, *(Temperatura en el eje de la tubería),* $u = 2\,V_0$; $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = T_C \end{cases}$

$$T - T_C = \frac{V_0}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial x}\,(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16\,R^2}) \quad ; \quad u = 2\,V_0\,(1 - \frac{r^2}{R^2})$$

b) Para, r = R, se determina el coeficiente de transmisión de calor h_C.

La temperatura:

$$T_{pF} = T_C + \frac{V_0}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial x}\,\frac{3\,r^2}{16}$$

El flujo de calor:

$$q = Cte \; ; \; -k\,(\frac{\partial T}{\partial x})_{r=R} = h_C\,(T_{pF} - T_F) \;\Rightarrow\; h_C = \frac{-k\,(\frac{\partial T}{\partial x})_{r=R}}{T_{pF} - T_F}$$

que permite determinar el coeficiente de transmisión de calor por convección.

Como la temperatura media del fluido T_F se puede obtener a partir de la expresión:

$$T_F \int_0^R \rho\,c_p\,u\,2\,\pi\,r\,dr = \int_0^R T\,\rho\,c_p\,u\,2\,\pi\,r\,dr$$

$$T_F = \frac{\int_0^R T\,u\,r\,dr}{\int_0^R u\,r\,dr} = \frac{\int_0^R 2\,V_0\,(1 - \frac{r^2}{R^2})\,\{T_C + \frac{2\,V_0}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial x}\,(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16\,R^2})\}\,r\,dr}{\int_0^R 2\,V_0\,(1 - \frac{r^2}{R^2})\,r\,dr} = T_C + \frac{7}{48}\,\frac{V_0\,R^2}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial x}$$

por lo que la *distribución de temperaturas* y el *coeficiente de convección* se pueden poner en la forma:

$$\frac{T - T_{pF}}{T_F - T_{pF}} = \frac{24}{11}\,\{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\,(\frac{r}{R})^4 - (\frac{r}{R})^2\}$$

$$h_C = \frac{k}{T_{pF} - T_F}\,\frac{\partial T}{\partial r}\rangle_{r=R} = \frac{\frac{k}{2}\,\frac{V_0\,R}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial x}}{(T_C + \frac{3}{8}\,\frac{V_0\,R^2}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial x}) - (T_C + \frac{7}{48}\,\frac{V_0\,R^2}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial x})} = \frac{24}{11}\,\frac{k}{R} = \frac{48}{11}\,\frac{k}{d}$$

Para flujo de calor uniforme:

$$h_C = \frac{48}{11}\,\frac{k}{d} = 4{,}3636\,\frac{k}{d} \quad ; \quad Nu = 4{,}3636$$

Para temperatura de pared constante (p.e. vapor condensando sobre la superficie exterior), a una distancia suficiente del punto en el que empieza el calentamiento corriente abajo, el flujo se

vuelve totalmente desarrollado térmicamente, la forma del perfil de temperatura no cambia, y el nº de Nu tiene un valor constante dado por la ecuación:

$T_{pF} = Cte \quad \Rightarrow \quad Nu_d = 3{,}656$

La longitud de entrada hidrodinámica para flujo laminar es: $L_H = 0{,}056\ Re_d\ d$

La longitud de entrada térmica para flujo laminar es: $L_T = 0{,}043\ Re_d\ Pr\ d$

Una formulación analítica de la que se derivan los resultados de la Fig XI.6, fue desarrollada por Hausen en la forma:

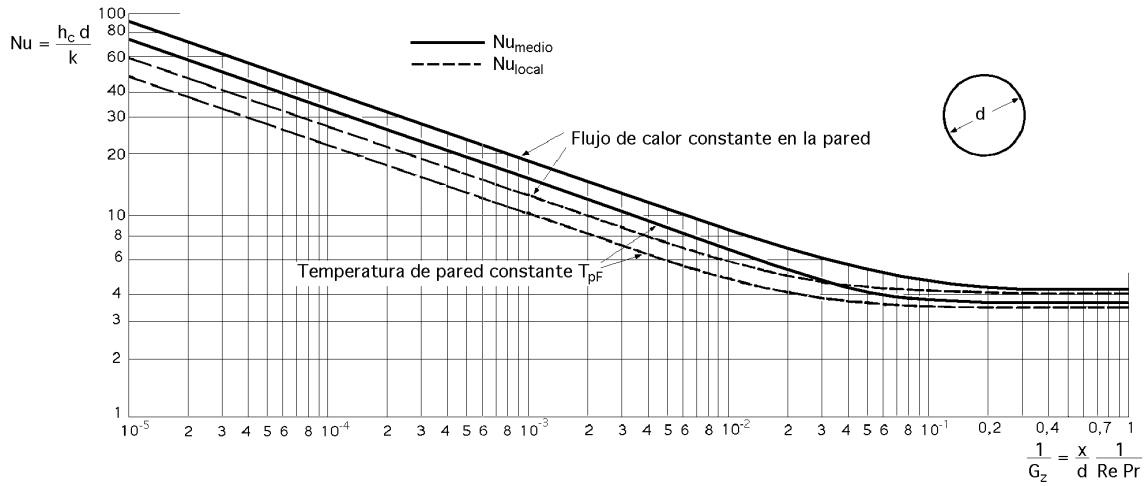


Fig XI.6.- Nºs de Nu medio y local para flujo laminar por el interior de un tubo cilíndrico, térmica e hidrodinámicamente desarrollado

Flujo de calor uniforme:

Coeficiente local de transmisión de calor: $Nu_x = Nu_{d\infty} + \dfrac{K_1 \left(\dfrac{d}{x}\right) Re_d\ Pr}{1 + K_2\ \left(\dfrac{d}{x}\right) Re_d\ Pr)^n}$

Temperatura de pared uniforme:

Coeficiente medio en el intervalo (0 < x < L): $Nu = Nu_{d_\infty} + \dfrac{K_1 \left(\dfrac{d}{L}\right) Re_d\ Pr}{1 + K_2\ \left(\dfrac{d}{L}\right) Re_d\ Pr)^n}$

Para aceites y otros fluidos en que la viscosidad varía apreciablemente con la temperatura, el término K_1 *se multiplica por* $\left(\dfrac{\eta_F}{\eta_{pF}}\right)^{0,14}$

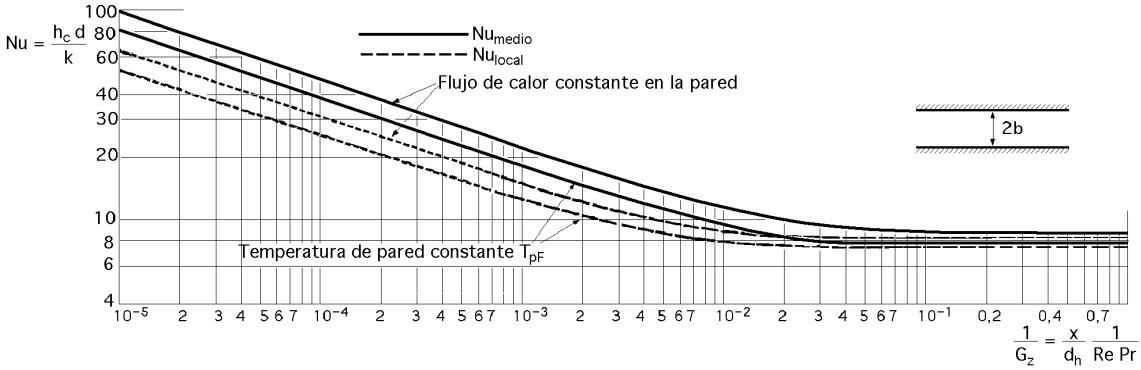
Para $\dfrac{Q}{A}$ *uniforme y distribución de velocidades parabólica:* $Nu_{d_\infty} = 4{,}36$; $\begin{cases} K_1 = 0{,}023 \\ K_2 = 0{,}0012 \end{cases}$; $n = 1$

Para $\dfrac{Q}{A}$ *uniforme y flujo desarrollado:* $Nu_{d_\infty} = 4{,}36$; $\begin{cases} K_1 = 0{,}036 \\ K_2 = 0{,}0011 \end{cases}$; $n = 1$; $Pr = 0{,}7$

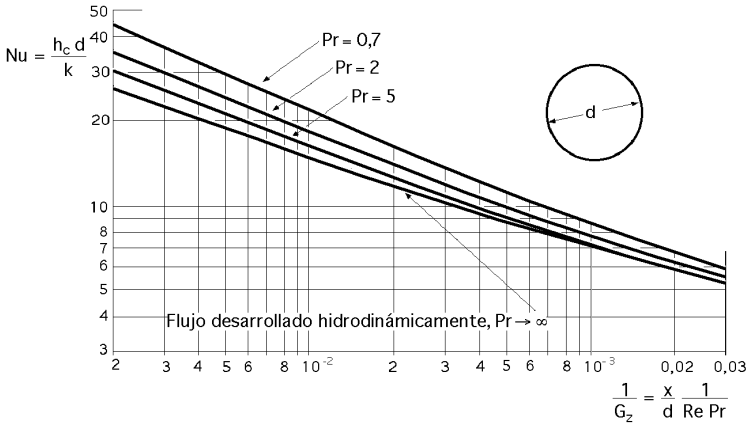
Para $T_{pF} = Cte$ *y distribución de velocidades parabólica:* $Nu_{d_\infty} = 3{,}66$; $\begin{cases} K_1 = 0{,}0668 \\ K_2 = 0{,}04 \end{cases}$; $n = 0{,}66$

Para $T_{pF} = Cte$ *y flujo desarrollado:* $Nu_{d_\infty} = 3{,}66$; $\begin{cases} K_1 = 0{,}104 \\ K_2 = 0{,}016 \end{cases}$; $n = 0{,}8$; $Pr = 0{,}7$

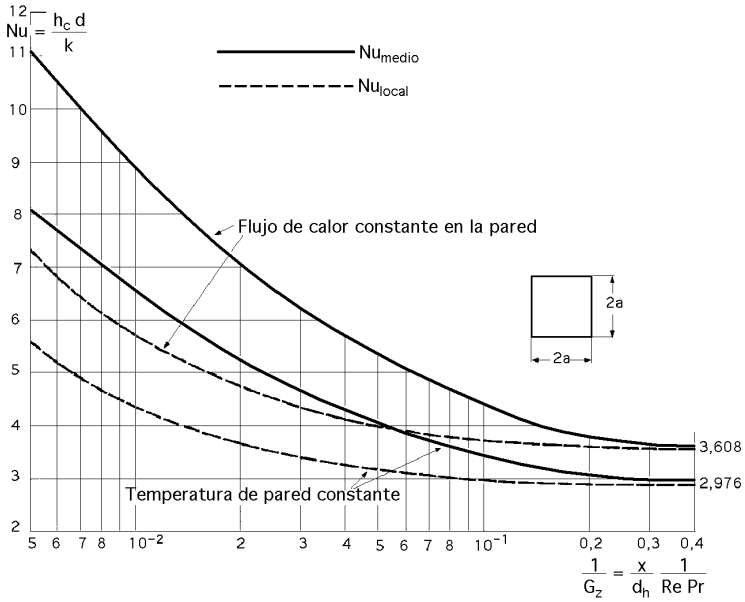
evaluándose las propiedades del fluido a la temperatura media T_F entre la entrada y la salida.



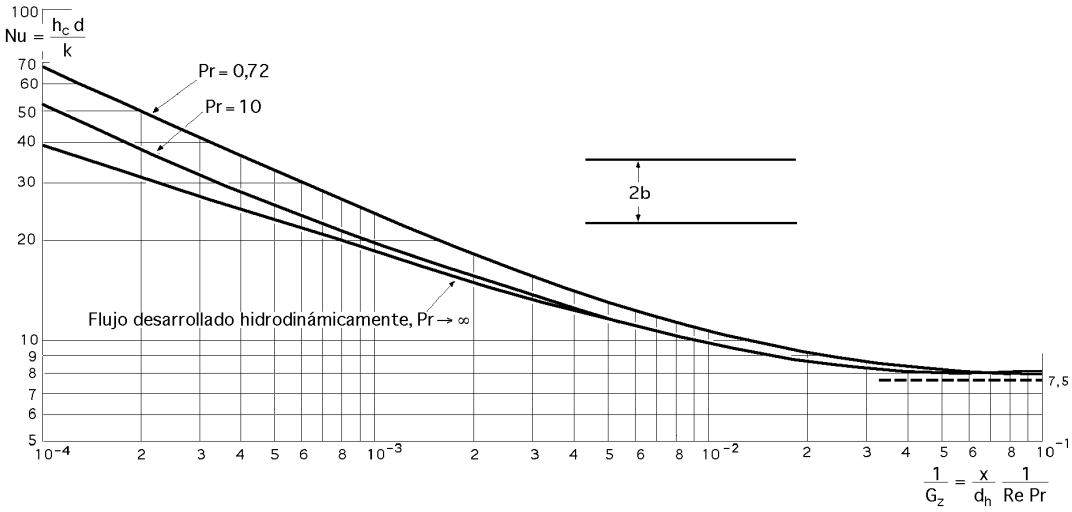
XI.7.- Números de Nu medio y local para flujo laminar entre placas planas paralelas, térmica e hidrodinámicamente desarrollados



XI.8.- Números de Nu medio y local para flujo laminar por el interior de un tubo cilíndrico, con temperatura de pared constante



XI.9.- Nos de Nu medio y local para flujo laminar por el interior de un conducto cuadrado, térmica e hidrodinámicamente desarrollado



XI.10.- Números de Nu medio para flujo laminar entre dos placas paralelas con temperatura de pared constante