VII.- CONDUCCIÓN DE CALOR EN SÓLIDOS FINITOS

pfernandezdiez.es

VII.1.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA BIDIMENSIONAL Y TRIDIMENSIONAL

Los problemas de conducción transitoria estudiados se limitan a configuraciones especiales como son la placa, el cilindro y esfera, con diversas situaciones de contorno. Estas formas se han escogido para asegurarnos de que la temperatura del sólido depende sólo de una coordenada espacial y del tiempo. En ciertas aplicaciones el hecho de despreciar el efecto de borde (que es a lo que equivalen las simplificaciones anteriores de conducción unidimensional), puede afectar a los resultados, por lo que en muchos casos prácticos no puede hacerse una simplificación de este tipo y habrá que considerar la conducción transitoria en función de más de una dimensión espacial.

Bajo ciertas condiciones, la solución de los problemas de conducción transitoria en dos o tres dimensiones se puede obtener por superposición de las soluciones de problemas unidimensionales; aplicando este método de superposición al problema de conducción transitoria en una barra larga rectangular, cuya sección transversal tiene por dimensiones, A en la dirección de las x, B en la de las y y ser indefinida en la dirección de las z, la conducción tendrá sólo lugar en las direcciones de las x y las y, por lo que se ha reducido el problema a un caso bidimensional y transitorio.

Si se calienta la barra de forma que inicialmente la distribución de temperaturas es, T= f(x,y), y en el instante, t = 0, la barra entra en contacto con un fluido convector, o con un foco térmico, a una temperatura, $T_F = 0$, (o a cualquier otra, constante), con un coeficiente de convección h_C constante en todas las superficies, la ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial t}$$

con las condiciones de contorno:

$$Para:\ t = 0\ ;\ T = f(x, y)$$

$$Para:\ t > 0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} en \begin{cases} x = 0 \\ x = A \end{cases} \xrightarrow{se\ tiene} \dfrac{dT}{dx} = \pm\,\dfrac{h_C\ T}{k} \\ en \begin{cases} y = 0 \\ y = B \end{cases} \xrightarrow{se\ tiene} \dfrac{dT}{dy} = \pm\,\dfrac{h_C\ T}{k} \end{cases}$$

Se toma el signo $\begin{cases} (+)\ en\ x = 0,\ y\ en\ y = 0 \\ (-)\ en\ x = A,\ y\ en\ y = B \end{cases}$

Si la función de distribución de temperatura inicial, T= f(x,y), es tal que se puede descomponer en forma de producto de otras dos funciones, cada una de las cuales sólo depende de una de las variables espaciales independientes, la condición inicial se puede sustituir por:

$$Para:\ t = 0\ ,\ T = f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y)$$

y si ésto es posible, la solución de la ecuación $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha}\ \frac{\partial T}{\partial t}$, con las condiciones indicadas, se puede expresar como el producto de dos soluciones transitorias unidimensionales.

Si representamos la solución que se busca, $T(x, y, t)$, por el producto: $T = T_x(x, t)\, T_y(y, t)$ siendo $T_x(x, t)$ función de x y del tiempo t, y $T_y(y, t)$ función de y y de tiempo t.

Al sustituir: $T = T_x(x, t)\, T_y(y, t)$ en la ecuación diferencial de partida se obtiene:

$$T_y \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} + T_x \frac{\partial^2 T_y}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha}\left(T_y \frac{\partial T_x}{\partial t} + T_x \frac{\partial T_y}{\partial t}\right)$$

$$T_y\left(\frac{1}{\alpha}\ \frac{\partial T_x}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2}\right) + T_x\left(\frac{1}{\alpha}\ \frac{\partial T_y}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_y}{\partial x^2}\right) = 0$$

y las condiciones inicial y de contorno se transforman en:

$$Para:\ t = 0\ \ ;\ \ T = T_x\, T_y = f_1(x)\, f_2(y)$$

$$Para\ \ t > 0 \Rightarrow\ \ en \begin{cases} \begin{cases} x = 0 \\ x = A \end{cases} \xrightarrow{se\ tiene} T_y \frac{dT_x}{dx} = \pm\ \frac{h_C\ T_x\ T_y}{k} \\ \begin{cases} y = 0 \\ y = B \end{cases} \xrightarrow{se\ tiene} T_x \frac{dT_y}{dy} = \pm\ \frac{h_C\ T_x\ T_y}{k} \end{cases}$$

El examen de las ecuaciones anteriores pone de manifiesto que se satisfacen si $T_x(x,t)$ y $T_y(y,t)$ son las soluciones de los dos problemas unidimensionales siguientes:

$$\frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\ \frac{\partial T_x}{\partial t}\ \ ;\ \ para \begin{cases} t = 0\ ;\ T_x = f_1(x) \\ t > 0,\ en \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \frac{dT_x}{dx} = \frac{h_C\ T_x}{k} \\ y = A \Rightarrow \frac{dT_x}{dx} = -\ \frac{h_C\ T_x}{k} \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 T_y}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\ \frac{\partial T_y}{\partial t}\ \ ;\ \ para \begin{cases} t = 0\ ;\ T_y = f_2(x) \\ t > 0,\ en \begin{cases} y = 0 \Rightarrow \frac{dT_y}{dy} = \frac{h_C\ T_y}{k} \\ y = B \Rightarrow \frac{dT_y}{dy} = -\ \frac{h_C\ T_y}{k} \end{cases} \end{cases}$$

Se observa que la solución del problema de conducción transitoria bidimensional se puede obtener como el producto de las soluciones de dos problemas unidimensionales, más sencillos, de las ecuaciones anteriores, siempre que la distribución inicial de la temperatura sea susceptible de expresarse en forma del producto:

$T = f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y),\ \ para:\ t = 0$

Estas ecuaciones para placa plana finita son idénticas a las que regulan la conducción transitoria de calor en la placa plana infinita. Por tanto, la solución al problema de conducción transitoria del calor en la barra rectangular se obtiene como el producto de las soluciones para dos placas infinitas cuya intersección forma la barra en cuestión.

En el caso de la barra rectangular calentada inicialmente a una temperatura uniforme, se pueden utilizar directamente tanto las soluciones analíticas, como los resultados gráficos de Heysler para placa plana, que se encuentre inicialmente a una temperatura uniforme. Los números de Biot y de Fourier para cada una de las dos placas que forman la barra serán distintos, a menos que dicha barra sea de sección transversal cuadrada.

El principio de superposición por producto que se acaba de exponer en la conducción transitoria bidimensional en una barra rectangular se puede hacer extensivo a otros tipos de configuraciones. Así, para un paralelepípedo de dimensiones finitas la solución se puede obtener como el producto de las soluciones de tres placas infinitas, y para el cilindro circular como el producto de las soluciones para una placa infinita y para un cilindro circular de longitud infinita.

Este principio de superposición es sólo aplicable a aquellos casos en los que la distribución de temperatura inicial se pueda descomponer en producto de varias funciones, cada una de las cuales sólo depende de una de las variables espaciales independientes.

Los ejemplos que hemos abordado pueden aplicarse tanto a procesos con condición de contorno isotérmica, como de convección. El empleo de gráficos para determinar las soluciones de problemas en régimen transitorio monodimensional, se puede ampliar a casos bi y tridimensionales; el método consiste en la utilización de datos obtenidos para casos monodimensionales y combinarlos adecuadamente en forma de productos.

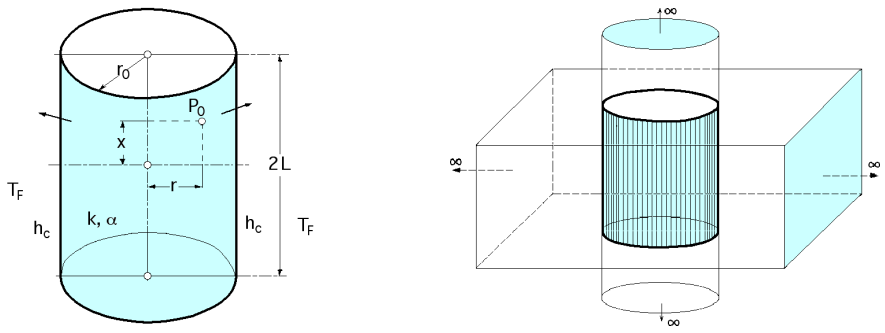


Fig VII.1.- Cilindro de longitud finita

Si, por ejemplo, se desea determinar la temperatura en el punto P del *cilindro de longitud finita* que se muestra en la Fig VII.1, dicho punto vendrá localizado por dos coordenadas *(x,r)*, siendo *x* una coordenada axial medida desde el centro del cilindro y *r* su posición radial. La condición inicial y las condiciones de contorno son las mismas que se aplican en el caso de gráficos monodimensionales correspondientes a procesos transitorios. El cilindro se puede suponer se encuentra inicialmente, $t = 0$, a una temperatura uniforme T_0; en ese instante, toda la superficie se pone en contacto con un fluido, que es el medio exterior, el cual se encuentra a una temperatura ambiental constante T_F.

El coeficiente de transferencia de calor por convección entre la superficie del cilindro y el fluido h_C, se puede suponer de valor constante. Por tratarse de un cilindro de longitud finita, la distribución de temperaturas en régimen bidimensional se puede considerar como el producto de las soluciones unidimensionales correspondientes a un cilindro infinito y a una placa infinita, siempre que la distribución inicial de temperaturas se pueda descomponer en dos factores, cada uno de los cuales depende de una sola coordenada espacial, es decir:

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{\Phi_p\,(r, x, t)}{\Phi_0} = C(r)\,P(x) = \frac{T(r, x, t) - T_F}{T_0 - T_F}$$

en la que los símbolos C(r) y P(x) son las temperaturas adimensionales que corresponden, respectivamente, al cilindro infinito y a la placa infinita:

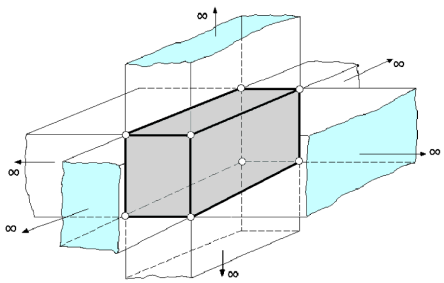


Fig VII.2.- Paralelepípedo finito

$$C(r) = \frac{\Phi(r,t)}{\Phi_0}\Big|_{cilindro} \quad ; \quad P(x) = \frac{\Phi(x,t)}{\Phi_0}\Big|_{placa}$$

La solución para C(r) se obtiene de los gráficos de temperaturas correspondientes al cilindro, mientras que la solución de P(x) se obtiene de los gráficos de temperaturas correspondientes a la placa plana infinita. Mediante un procedimiento análogo al citado para el cilindro finito, se pueden obtener soluciones para otras geometrías bi o tridimensionales, como el paralelepípedo representado en la Fig VII.2, intersección de tres placas infinitas.

En las gráficas que se presentan en las Fig VII.3 y 4, se hace un resumen de las soluciones, con la siguiente simbología:

$$S(x) = \frac{\Phi(x,t)}{\Phi_0}\ (sólido\ semi\ \infty)\ ;\ P(x) = \frac{\Phi(x,t)}{\Phi_0}\ (placa\ \infty)\ ;\ C(r) = \frac{\Phi(r,t)}{\Phi_0}\ (cilindro\ \infty)$$

La ampliación de los gráficos monodimensionales a problemas con geometrías bi y tridimensionales permite resolver, en consecuencia, una diversidad sorprendentemente grande de problemas de transmisión de calor en régimen transitorio.

Calor evacuado al exterior.- Para hallar el calor total, se puede utilizar una expresión debida a Langston, de la forma:

$$Q = \Theta\ \rho\ c_p V\ (T_0 - T_F\ )$$

en la que Θ es la fracción de energía disipada $\Theta = \dfrac{Q(t)}{Q_0}$, que se puede aplicar en la forma:

a) Intersección de placa infinita y cilindro infinito, (cilindro):

$$\Theta = \Theta_{placa} + \Theta_{cilindro}\ (1 - \Theta_{placa}\ ) = \Theta_{placa} + \Theta_{cilindro} - \Theta_{placa}\Theta_{cilindro}$$

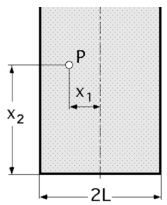
b) Intersección de 3 placas infinitas, (prisma):

$$\Theta = \Theta_{placa\ (1)} + \Theta_{placa\ (2)}\ (1 - \Theta_{placa\ (1)}\ ) + \Theta_{placa\ (3)}\ (1 - \Theta_{placa\ (1)}\ )\ (1 - \Theta_{placa\ (2)}\ )$$

Estas soluciones no son válidas cuando la temperatura inicial del cuerpo no sea uniforme, o cuando la temperatura T_F del fluido no sea la misma en toda la superficie de contacto del cuerpo.

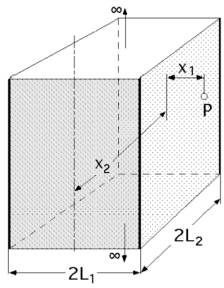
SISTEMAS BIDIMENSIONALES

a) Placa semiinfinita



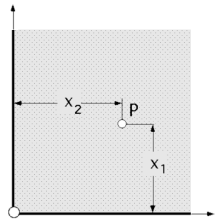
$$\frac{\Phi_p(x_1, x_2)}{\Phi_0} = P(x_1)\ S(x_2\ )$$

b) Barra rectangular infinita



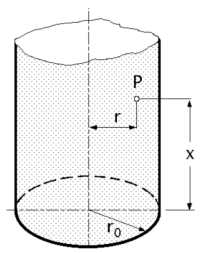
$$\frac{\Phi_p(x_1, x_2)}{\Phi_0} = P(x_1)\ P(x_2\ )$$

c) Un cuarto de sólido infinito



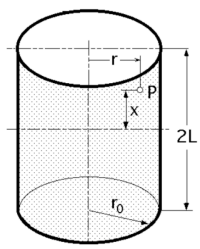
$$\frac{\Phi_p(x_1, x_2)}{\Phi_0} = S(x_1)\ S(x_2\ )$$

d) Cilindro semiinfinito



$$\frac{\Phi_p(x, r)}{\Phi_0} = S(x)\ C(r)$$

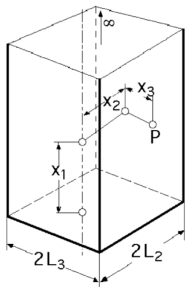
e) Cilindro finito



$$\frac{\Phi_p(x, r)}{\Phi_0} = P(x)\ C(r)$$

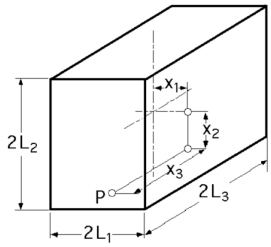
SISTEMAS TRIDIMENSIONALES

a) Barra rectangular semiinfinita



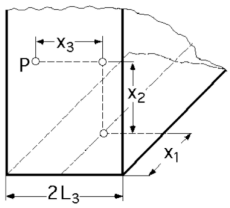
$$\frac{\Phi_p(x_1,x_2,x_3)}{\Phi_0} = S(x_1)\,P(x_2)P(x_3)$$

b) Paralelepípedo rectangular



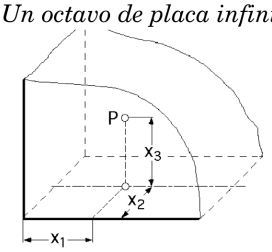
$$\frac{\Phi_p(x_1,x_2,x_3)}{\Phi_0} = P(x_1)\,P(x_2)P(x_3)$$

c) Un cuarto de placa infinita



$$\frac{\Phi_p(x_1,x_2,x_3)}{\Phi_0} = S(x_1)\,S(x_2)P(x_3)$$

d) Un octavo de placa infinita

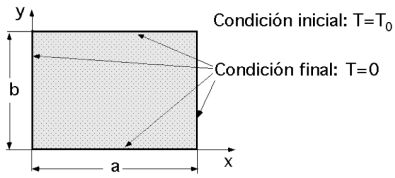


$$\frac{\Phi_p(x_1,x_2,x_3)}{\Phi_0} = S(x_1)\,S(x_2)S(x_3)$$

Fig VII.3.- Soluciones en forma de productos a los problemas de conducción en régimen transitorio

VII.2.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN DOS Y TRES DIMENSIONES, CON CONDICIÓN DE CONTORNO ISOTÉRMICA.

a) Rectángulo con temperatura inicial uniforme T_0 y condición de contorno isotérmica



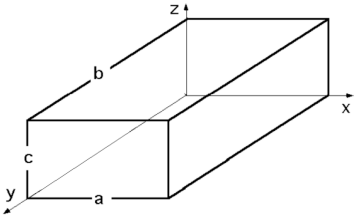
$$\begin{cases} t = 0 \;;\; T = T_0 \;;\; 0 \le x \le a \;;\; 0 \le y \le b \\ t > 0 \;;\; T = 0 \;;\; x = 0 \;;\; x = a \;;\; y = 0 \;;\; y = b \end{cases}$$

$$\frac{\Phi(x,y,t)}{\Phi_0} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\sigma^2\alpha t}\,\frac{sen(\lambda_n x)\,sen(\eta_n y)}{(2n+1)(2m+1)} = 8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\sigma^2\alpha t}\,\frac{sen(\lambda_n x)\,sen(\eta_n y)}{(a\lambda_n)(b\eta_m)}$$

$$\sigma^2 = \lambda_n^2 + \eta_m^2 \quad ; \quad \lambda_n = \frac{(2n+1)\,\pi}{a} \quad ; \quad \eta_m = \frac{(2m+1)\,\pi}{b}$$

.....

b) Paralelepípedo con temperatura inicial uniforme T_0 y condición de contorno isotérmica



$$\begin{cases} t = 0 \;;\; T = T_0 \;;\; 0 \le x \le a \;;\; 0 \le y \le b \\ t > 0 \;;\; T = 0 \;;\; x = 0 \;;\; x = a \;;\; y = 0 \;;\; y = b \end{cases}$$

$$\frac{\Phi(x,y,z,t)}{\Phi_0} = 64\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} e^{-\sigma^2\alpha t}\,\frac{sen(\lambda_n x)\;sen(\eta_n y)\;sen(\gamma_p z)}{\lambda_n\,\eta_m\,\gamma_p}$$

$$\sigma^2 = \lambda_n^2 + \eta_m^2 + \gamma_p^2 \quad ; \quad \lambda_n = \frac{(2\,n+1)\,\pi}{a} \quad ; \quad \eta_m = \frac{(2\,m+1)\,\pi}{b} \quad ; \quad \gamma_p = \frac{(2\,p+1)\,\pi}{c}$$

.....

c) Cilindro finito con temperatura inicial uniforme T_0 y condición de contorno isotérmica

$$\begin{cases} t = 0 \; ; \; T = T_0 \; ; \; 0 \le r \le R \; ; \; 0 \le z \le H \\ t > 0 \; ; \; T = 0 \; ; \; r = R \; ; \; z = 0 \; ; \; z = H \end{cases}$$

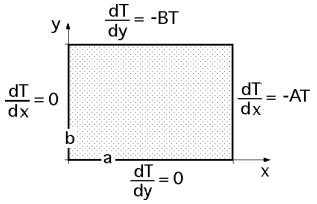
$$\frac{\Phi(r,z,t)}{\Phi_0} = \frac{8}{\pi\,R} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)\,sen\,(\frac{2m+1}{H}\,\pi\,z)\,e^{-\sigma^2\,\alpha\,t}}{\lambda_n\,(2m+1)\,J_1(\lambda_n R)}$$

$$J_0(\lambda_n R) = 0 \quad ; \quad \sigma^2 = \lambda_n^2 + \{\frac{(2m+1)\,\pi}{H}\}^2$$

.....

VII.3.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN DOS Y TRES DIMENSIONES, CON CONDICIÓN DE CONTORNO DE CONVECCIÓN

a) Rectángulo con temperatura inicial uniforme T_0 y condición de contorno de convección.



$$t = 0 \; ; \; \Phi = \Phi_0 = T_0 - T_F \; ; \; 0 \le x \le a \; ; \; 0 \le y \le b$$

$$t > 0 \; ; \; \begin{cases} x = y = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \; ; \quad x = a \;\; \Rightarrow \;\; \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = -\,A\,\Phi \\ y = b \; ; \; \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = -\,B\,\Phi \end{cases}$$

$$\frac{F(x,y,t)}{\Phi_0} = 4\,A\,B \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_n x)\cos(\eta_m y)\,e^{-\sigma^2\,\alpha\,t}}{\{a\,(\lambda_n^2 + A^2) + A\}\,\{b\,(\eta_m^2 + B^2) + B\}\cos(\lambda_n a)\cos(\eta_m b)}$$

$$\text{con } \lambda_n \text{ y } \mu_m \text{ raíces de: } \begin{cases} \lambda_n \; tg\,(\lambda_n a) = \dfrac{h_{cx}}{k} = A \\ \mu_m \; tg\,(\mu_m b) = \dfrac{h_{cy}}{k} = B \end{cases} \quad ; \quad \sigma^2 = \lambda_n^2 + \mu_m^2$$

.....

b) Paralelepípedo con temperatura inicial uniforme T_0 y condición de contorno de convección.

$$t = 0 \; ; \; \Phi = \Phi_0 = T_0 - T_F \; ; \; 0 \le x \le a \; ; \; 0 \le y \le b \; ; \; 0 \le z \le c$$

$$t > 0 \; ; \quad x = y = z = 0 \; ; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \begin{cases} x = a \; ; \; \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = -\,A\,\Phi \; ; \; y = b \; ; \; \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = -\,B\,\Phi \\ z = c \; ; \; \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = -\,C\,\Phi \end{cases}$$

$$\frac{\Phi(x,y,z,t)}{\Phi_0} = 8\,A\,B\,C \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_n x)\,\cos(\eta_m y)\,\cos(\gamma_p z)\,e^{-\sigma^2\,\alpha\,t}}{\{a\,(\lambda_n^2 + A^2) + A\}\,\{b\,(\eta_m^2 + B^2) + B\}\,\{c\,(\gamma_p^2 + C^2) + C\}\,\cos(\lambda_n a)\cos(\eta_m b)\cos(\gamma_p c)}$$

$$\text{con } \lambda_n \text{ , } \mu_m \text{ y } \gamma_p \text{ raíces de: } \begin{cases} \lambda_n \; tg\,(\lambda_n a) = \dfrac{h_{cx}}{k} = A \quad ; \quad \gamma_p \; tg\,(\gamma_p c) = \dfrac{h_{cz}}{k} = C \\ \mu_m \; tg\,(\mu_m b) = \dfrac{h_{cy}}{k} = B \end{cases} \quad ; \quad \sigma^2 = \lambda_n^2 + \mu_m^2 + \gamma_p^2$$

.....

c) Cilindro finito con temperatura inicial uniforme T_0 y condición de contorno de convección

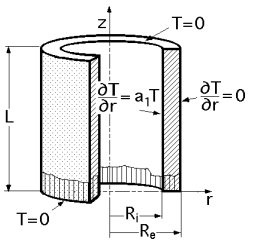
$$t>0\ ;\ \begin{cases} r=R\ ;\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} = -A\,\Phi \\ z=0 \Rightarrow \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = 0\ \ ;\ \ z=H\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = -B\,\Phi \end{cases}$$

$$\frac{\Phi(r,z,t)}{\Phi_0} = \frac{4\,A\,B}{R} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)\ cos\ (\eta_m z)\ e^{-\sigma^2 \alpha t}}{(\lambda_n^2 + A^2)\ J_0(\lambda_n R)\ \{H\ (\eta_m^2 + B^2) + B\}\ cos\ (\eta_m H)}$$

$$con\ \lambda_n\ y\ \eta_m\ raíces\ de:\ \left\{ \begin{array}{l} A\ J_0(\lambda_n R) = \lambda_n\ J_1(\lambda_n R) \\ \eta_m\ tg\ (\eta_m\ H) = B \end{array} \right\}\ ;\quad \sigma^2 = \lambda_n^2 + \eta_m^2$$

.....

d) Tubo finito con temperatura Φ_0 en la base superior y en la base inferior, convección en la superficie lateral interior y aislamiento térmico en la superficie lateral exterior



$$t=0\ ;\ \Phi = \Phi_0 = T_0 - T_F\ \ ;\ \ 0 \le z \le L\ \ ;\ \ R_e \le r \le R_i$$

$$t>0\ ;\ \begin{cases} r=R_i\ \ ;\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\Big\rangle_{r=R_i} = a_1\,\Phi = \dfrac{h_c}{k}\,\Phi \\ r=R_e\ \ ;\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\Big\rangle_{r=R_e} = 0 \end{cases}$$

$$\Phi = 0\ ;\ z=0\ \ ;\ \ z=L$$

$$\frac{\Phi(r,z,t)}{\Phi_0} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2\,\{\lambda_n\,J_0'(\lambda_n R_i) + a_1\,J_0(\lambda_n R_i)\}^2\,N_0(\lambda_n r)}{\{\lambda_n\,J_0'(\lambda_n R_i) + a_1\,J_0(\lambda_n R_i)\}^2 - (\lambda_n^2 + a_1^2)\,J_0^2(\lambda_n R_e)}\ x$$

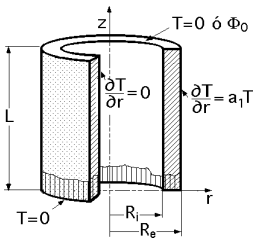
$$x\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{sen\,(\eta\ z)}{2m+1}\ e^{-\sigma^2 \alpha\ t}\ \int_{R_i}^{R_e} r\,\Phi_0\,\{J_0(\lambda_n r)\,Y_0'(\lambda_n R_e) - J_0'(\lambda_n R_e)\,Y_0(\lambda_n r)\}\,dr$$

$$N_0(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r)\,Y_0'(\lambda_n R_e) - J_0'(\lambda_n R_e)\,Y_0(\lambda_n r)$$

$$con\ \lambda_n\ y\ \eta\ raíces\ de:\ \begin{cases} \eta = \dfrac{(2m+1)\,\pi}{L} \\ \dfrac{\{\lambda_n Y_0(\lambda_n R_i) + a_1 Y_0(\lambda_n R_i)\}\,J_0'(\lambda_n R_e)}{\{\lambda_n J_0(\lambda_n R_i) + a_1 J_0(\lambda_n R_i)\}\,Y_0'(\lambda_n R_e)\}} = 1 \end{cases}\ ;\quad \sigma^2 = \lambda_n^2 + \eta^2$$

.....

e) Tubo finito con temperatura Φ_0 en la base superior y en la base inferior, convección en la superficie lateral exterior y aislamiento térmico en la superficie lateral interior



$$t=0\ ;\ \Phi = \Phi_0 = T_0 - T_F\ \ ;\ \ 0 \le z \le L\ \ ;\ \ R_e \le r \le R_i$$

$$t>0\ ;\ \begin{cases} r=R_e\ \ ;\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\Big\rangle_{r=R_e} = a_1\ \Phi = \dfrac{h_c}{k}\ \Phi \\ r=R_i\ \ ;\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\Big\rangle_{r=R_i} = 0 \end{cases}$$

$$\Phi = 0\ ;\ z=0\ \ ;\ \ z=L$$

$$\frac{\Phi(r,z,t)}{\Phi_0} = 2\,\pi\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2\,\{\lambda_n\ J_0'(\lambda_n R_e) + a_1\ J_0(\lambda_n R_e)\}^2\,N_0(\lambda_n r)}{\{\lambda_n\ J_0'(\lambda_n R_e) + a_1\ J_0(\lambda_n R_e)\}^2 + (\lambda_n^2 + a_1^2)\,J_0^2(\lambda_n R_e)}\ x$$

$$x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{sen\,(\eta\, z)}{2m+1}\, e^{-\sigma^2 \alpha t} \int_{R_i}^{R_e} r\, \Phi_0 \{J_0(\lambda_n r)\, Y_0'(\lambda_n R_e) - J_0'(\lambda_n R_e)\, Y_0(\lambda_n r)\}\, dr$$

$$N_0(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r)\, Y_0'(\lambda_n R_e) - J_0'(\lambda_n R_e)\, Y_0(\lambda_n r)$$

$$\text{con } \lambda_n \text{ y } \eta \text{ raíces de: } \left\{ \begin{array}{l} \eta = \dfrac{(2m+1)\,\pi}{L} \\ \dfrac{\{\lambda_n Y_0(\lambda_n R_i) + a_1 Y_0(\lambda_n R_i)\}\, J_0'(\lambda_n R_e)}{\{\lambda_n J_0(\lambda_n R_i) + a_1 J_0(\lambda_n R_i)\}\, Y_0'(\lambda_n R_e)} = 1 \end{array} \right\} \; ; \quad \sigma^2 = \lambda_n^2 + \eta^2$$

.....

f) Tubo finito con temperatura Φ_0 en la base superior y en la base inferior, con convección en la superficie lateral exterior y en la superficie lateral interior

$$t = 0 \; ; \; \Phi = \Phi_0 = T_0 - T_F \; ; \; 0 \le z \le L \; ; \; R_e \le r \le R_i$$

$$t > 0 : \left\{ \begin{array}{l} r = R_e \; ; \; \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\Big\rangle_{r=R_e} = a_1\, \Phi = \dfrac{h_{c_e}}{k}\, \Phi \\ r = R_i \; ; \; \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\Big\rangle_{r=R_i} = b_1\, \Phi = \dfrac{h_{c_i}}{k}\, \Phi \end{array} \right.$$

$$\Phi = 0 \; ; \; z = 0 \; ; \; z = L$$

$$\frac{\Phi(r, z, t)}{\Phi_0} = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 \{\lambda_n\, J_0'(\lambda_n R_e) + b_1\, J_0(\lambda_n R_e)\}^2\, N_0(\lambda_n r)}{(\lambda_n^2 + b_1^2)\{\lambda_n\, J'(\lambda_n R_0) + b_1\, J_0(\lambda_n R_0)\}^2 - (\lambda_n^2 + a_1^2)\{\lambda_n\, J_0'(\lambda_n R_e) + a_1\, J_0(\lambda_n Re)\}^2}\, x$$

$$x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{sen\,(\eta\, z)}{2m+1}\, e^{-\sigma^2 \alpha t} \int_{R_i}^{R_e} r\, \Phi_0\, [J_0(\lambda_n r)\{\lambda_n Y_0'(\lambda_n R_0) - b_1\, Y_0(\lambda_n R_i)\} - Y_0(\lambda_n r)\{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_0) - b_1\, J_0(\lambda_n R_i)\}]\, dr$$

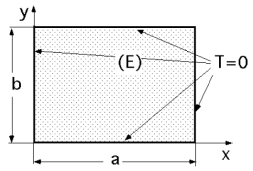
$$N_0(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r)\, Y_0'(\lambda_n R_e) - J_0'(\lambda_n R_e)\, Y_0(\lambda_n r)$$

$$\text{con } \lambda_n \text{ y } \eta \text{ raíces de: } \left\{ \begin{array}{l} \eta = \dfrac{(2m+1)\,\pi}{L} \\ \dfrac{\{\lambda_n Y_0'(\lambda_n R_i) - b_1 Y_0(\lambda_n R_i)\}\{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_e) + a_1 J_0(\lambda_n R_e)\}}{\{\lambda_n Y_0'(\lambda_n R_e) + a_1 Y_0(\lambda_n R_e)\}\{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_i) - b_1 J_0(\lambda_n R_i)\}} = 1 \end{array} \right. \; ; \quad \sigma^2 = \lambda_n^2 + \eta^2$$

.....

VII.4.- TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONDUCCIÓN EN RÉGIMEN TRANSITORIO CON GENERACIÓN DE CALOR E.

a) Rectángulo con generación de calor E; condición de contorno isotérmica.



$$t = 0 \; ; \; T = 0 \; ; \; 0 \le x \le a \; ; \; 0 \le y \le b$$

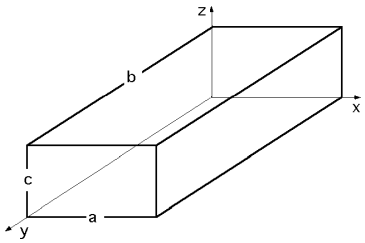
$$t > 0 \; ; \; \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \;\Rightarrow\; T = 0 \; ; \; y = 0 \;\Rightarrow\; T = 0 \\ x = a \;\Rightarrow\; T = 0 \; ; \; y = b \;\Rightarrow\; T = 0 \end{array} \right. \; ; \quad E = Cte$$

$$T(x, y, t) = \frac{4E}{\pi^2 k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{sen\,(\lambda_n x)\, sen\,(\mu_m y)\,(1 - e^{-\sigma^2 \alpha t})}{n\, m\, \sigma^2}$$

$$n = 1, 3, 5, \ldots \; ; \; m = 1, 3, 5, \ldots \; ; \; \lambda_n = \frac{\pi\, n}{a} \; ; \; \mu_m = \frac{\pi\, m}{b} \; ; \; \sigma^2 = \lambda_n^2 + \mu_m^2$$

.....

b) Paralelepípedo con generación de calor E; condición de contorno isotérmica.



$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{E}{k}$$

$$t = 0 \; ; \; T = 0 \; ; \; 0 \le x \le a \; ; \; 0 \le y \le b \; ; \; 0 \le z \le c$$

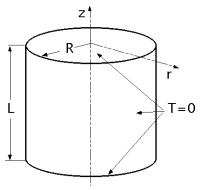
$$t > 0 \; ; \; \begin{cases} x = 0 \Rightarrow T = 0 \; ; \; y = 0 \Rightarrow T = 0 \; ; \; z = 0 \Rightarrow T = 0 \\ x = a \Rightarrow T = 0 \; ; \; y = b \Rightarrow T = 0 \; ; \; z = c \Rightarrow T = 0 \end{cases} \; ; \quad E = Cte$$

$$T(x, y, z, t) = \frac{8\,E}{\pi^3 k} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{sen\,(\lambda_n x)\; sen\,(\mu_m y)\; sen\,(\eta_p z)\,(1 - e^{-\sigma^2 \alpha t})}{n\; m\; p\; \sigma^2}$$

$$n = m = p = 1, 3, 5, \ldots \; ; \quad \lambda_n = \frac{\pi\, n}{a} \; ; \quad \mu_m = \frac{\pi\, m}{b} \; ; \quad \eta_p = \frac{\pi\, p}{c} \; ; \quad \sigma^2 = \lambda_n^2 + \mu_m^2 + \eta_p^2$$

.....

c) Cilindro finito con generación de calor E; condición de contorno isotérmica.



$$t = 0 \; ; \; T = 0 \; ; \; 0 \le r \le R \; ; \; 0 \le z \le L$$

$$t > 0 \; ; \; \begin{cases} r = R \Rightarrow T = 0 \\ z = 0 \Rightarrow T = 0 \; ; \; z = L \Rightarrow T = 0 \end{cases} \; ; \quad E = Cte$$

$$T(r, z, t) = \frac{4\,E}{\pi\, R\, k} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)\, sen\,(\mu_m\, z)\,(1 - e^{-\sigma^2 \alpha t})}{n\; \lambda_n\; \sigma^2} \; ; \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

con λ_n *raíces de* $J_0(\lambda_n R) = 0$, *y* μ_m *de* $\mu_m = \frac{\pi\, m}{L}$

.....

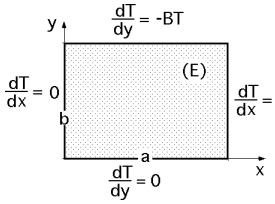
d) Esfera con generación de calor E; condición de contorno isotérmica.

Condiciones de contorno: $\begin{cases} t = 0 \; ; \; \Phi = \Phi_0 \; ; \; 0 \le r \le R \\ t > 0 \; ; \; r = R \; ; \; \Phi_0 = 0 \; ; \; E = Cte \end{cases}$

$$\Phi(r, t) = \frac{2\,E}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\,(\lambda_n r)}{\lambda_n^3\; r}\,(1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t})\,(-1)^n \; ; \quad \lambda_n = \frac{\pi\; n}{R}$$

.....

e) Rectángulo con generación de calor E; condición de contorno de convección



$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{E}{k}$$

$$t = 0 \; ; \; \Phi = 0 \; ; \quad 0 \le x \le a \quad ; \quad 0 \le y \le b$$

$$t > 0 : \begin{cases} x = 0 \; ; \; y = 0 \; ; \; \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right\rangle_{x=0} = 0 \; ; \quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right\rangle_{y=0} = 0 \\ x = a \; ; \; \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right\rangle_{x=a} = -\frac{h_{cx}}{k}\Phi \quad ; \quad y = b \; ; \; \left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right\rangle_{y=b} = -\frac{h_{cy}}{k}\Phi \end{cases}$$

$$\Phi(x, y, t) = \frac{4\,E\,\frac{h_{cx}}{k}\,\frac{h_{cy}}{k}}{k} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\,(\lambda_n x)\,\cos\,(\mu_m y)\,(1 - e^{-\sigma^2 \alpha\, t})}{\{a\,(\lambda_n^2 + \frac{h_{cx}^2}{k^2}) + \frac{h_{cx}}{k}\}\{b\,(\mu_m^2 + \frac{h_{cy}^2}{k^2}) + \frac{h_{cy}}{k}\}\,\cos\,(\lambda_n a)\,\cos\,(\mu_m b)}$$

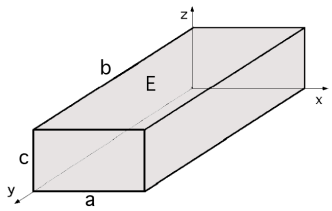
$$\text{con } \lambda_n \text{ y } \mu_m \text{ raíces de: } \begin{cases} \lambda_n tg(\lambda_n a) = \dfrac{h_{cx}}{k} \\ \mu_m tg(\mu_m b) = \dfrac{h_{cy}}{k} \end{cases} \quad ; \quad \sigma^2 = \lambda_n^2 + \mu_m^2$$

.....

f) Paralelepípedo con generación de calor E; condición de contorno de convección.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{E}{k}$$

$$t = 0 \; ; \; \Phi = 0 \; ; \quad 0 \le x \le a \quad ; \quad 0 \le y \le b \quad ; \quad 0 \le z \le c$$



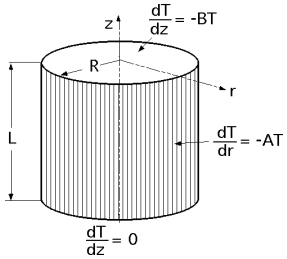
$$t > 0 : \begin{cases} x = 0 \; ; \; y = 0 \; ; \; z = 0 \; ; \; \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\Big\rangle_{x=0} = 0 \; ; \quad \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\Big\rangle_{y=0} = 0 \; ; \quad \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\Big\rangle_{z=0} = 0 \\ x = a \; ; \; \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\Big\rangle_{x=a} = -\dfrac{h_{Cx}}{k} \Phi = -A\Phi \\ y = b \; ; \; \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\Big\rangle_{y=b} = -\dfrac{h_{Cy}}{k} \Phi = -B\Phi \\ z = c \; ; \; \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\Big\rangle_{z=c} = -\dfrac{h_{Cz}}{k} \Phi = -C\Phi \end{cases}$$

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{8 E_0 \; A B C}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_n x) \; \cos(\mu_m y) \; \cos(\eta_p z) \; (1 - e^{-\sigma^2 \alpha t})}{\{a(\lambda_n^2 + A^2) + A\} \; \{b(\mu_m^2 + B^2) + B\} \; \{c(\eta_p^2 + C^2) + C\} \; \cos(\lambda_n a) \; \cos(\mu_m b) \; \cos(\eta_p c)}$$

$$\text{con } \lambda_n \text{ , } \mu_m \text{ y } \eta_p \text{ raíces de: } \begin{cases} \lambda_n \; tg(\lambda_n a) = \dfrac{h_{cx}}{k} \\ \mu_m \; tg(\mu_m b) = \dfrac{h_{cy}}{k} \\ \eta_p \; tg(\eta_p c) = \dfrac{h_{cz}}{k} \end{cases} \quad ; \quad \sigma^2 = \lambda_n^2 + \mu_m^2 + \eta_p^2 \quad ; \quad n = m = p = 1, 3, 5, \ldots$$

.....

g) Cilindro finito con generación de calor E; condición de contorno de convección.



$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{E}{k}$$

$$t = 0 \; ; \; \Phi = 0 \; ; \quad 0 \le r \le R \; ; \quad 0 \le z \le L$$

$$t > 0 \; ; \begin{cases} r = R \; ; \; \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} = -\dfrac{h_c}{k} \Phi = -A\Phi \\ z = 0 \; ; \; \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad ; \quad z = L \; ; \; \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} = -\dfrac{h_{cz}}{k} \Phi = -B\Phi \end{cases}$$

$$\Phi(r, z, t) = \frac{4 E A B}{k R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r) \; \cos(\mu_m z)}{\{L(\mu_m^2 + B^2) + B\} \; \sigma^2 (\lambda_n^2 + A^2) \; J_0(\lambda_n R) \; \cos(\mu_m L)} \; (1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t})$$

$$\text{con } \lambda_n \text{ y } \mu_m \text{ raíces de: } \begin{cases} \dfrac{J_0(\lambda_n R)}{J_1(\lambda_n R)} = \dfrac{\lambda_n R}{Bi} = \dfrac{\lambda_n}{A} \\ \mu_m tg(\mu_m L) = B \end{cases}$$

.....