V.- CONDICIÓN DE CONTORNO ISOTÉRMICA EN SÓLIDOS INFINITOS

pfernandezdiez.es

V.1.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN PLACA INFINITA CON CONDICIÓN DE CONTORNO ISOTÉRMICA

La conducción a través de una placa plana de espesor finito L en la dirección x, y de espesor infinito en las otras dos, por lo que en éstas se desprecian los efectos de borde, la ecuación diferencial de la conducción es:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial \Phi}{\partial t}\ , \quad con:\ \Phi = T(x,\,t) - T_F$$

La zona próxima a la periferia es de resistencia superficial despreciable por lo que Fo < 1 y desde ahí hasta el núcleo, Fo > 1.

Sí es posible representar la distribución de temperaturas, $\Phi = T - T_F$, mediante una expresión de la forma:

$$\Phi = X(x)\,\theta(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \dfrac{\partial X}{\partial x}\,\theta \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = \dfrac{\partial \theta}{\partial t}\,X \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\,\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{X}\,\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha\,\theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\,\lambda^2$$

El parámetro λ^2 se introduce por cuanto cada uno de los miembros de dicha igualdad es función de una sola variable; esta separación de variables conduce al siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \alpha\,\lambda^2\,\theta = 0 \quad ; \quad \theta = C_1\,e^{-\lambda^2 \alpha\,t}$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda^2\,X = 0 \quad ; \quad X = C_2\,sen\,(\lambda\,x) + C_3\,cos\,(\lambda\,x)$$

La solución general es:

$$\Phi = C_1\ e^{-\lambda^2 \alpha\ t}\{C_2\ sen\ (\lambda\ x) + C_3\ cos\ (\lambda\ x)\} = e^{-\lambda^2 \alpha\ t}\{B_1\ sen\ (\lambda\ x) + B_2\ cos\ (\lambda\ x)\}$$

$$\text{Condición inicial, para: } \begin{cases} t = 0 \\ 0 \le x \le L \end{cases} \Rightarrow \Phi = \Phi(x, 0) = f(x) \ \text{ó} \ \Phi_0 = T_0 - T_F$$

$$\text{Condiciones de contorno, para: } \begin{cases} t > 0 \\ -\infty \le x \le +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} en:\ x = 0\ ;\ \Phi = 0 = T(0, t) \\ en:\ x = L\ ;\ \Phi = 0 = T(L, t) \end{cases}$$

La condición de contorno se presenta para el caso límite de considerar un valor muy grande del coeficiente de transferencia térmica por convección, {metales líquidos}, por lo que la resistencia térmica de la capa de convección es despreciable y la temperatura de la superficie del cuerpo en el tiempo t es idéntica a la temperatura del fluido, situación a la que se debe llegar en un tiempo muy pequeño (*condición de contorno isotérmica*).

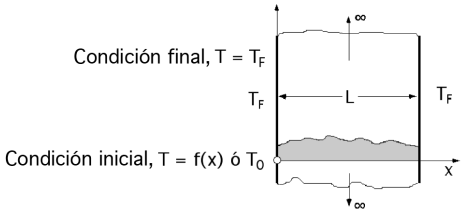


Fig V.1.- Placa plana infinita

Aplicando las condiciones de contorno a la ecuación diferencial:

$$\text{Para: } \begin{cases} x = 0\ ,\ \Phi = 0 \Rightarrow B_2 = 0 \\ x = L\ ,\ \Phi = 0 \Rightarrow 0 = e^{-\lambda^2 \alpha t}\ B_1\ sen\ (\lambda\ L) \Rightarrow sen\ (\lambda\ L) = 0 \end{cases}$$

y considerando que para cualquier valor de t, se satisface por un número infinito de valores del parámetro (λL) se puede poner:

$$sen\ (\lambda_n L) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{\pi\ n}{L}\ ;\ n = 1, 2, 3,...$$

Para cada valor de n se obtiene uno de λ_n siendo éstos los valores característicos del problema, por lo que la solución para la distribución de temperaturas es un desarrollo en serie de la forma:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\ B_n\ sen\ (\lambda_n x)$$

Aplicando la condición inicial, t = 0, Φ = f(x), resulta: $\Phi = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\ sen\ (\lambda_n x)$

En una serie infinita de funciones de la forma:

$$sen\ (\lambda_1 x),\ sen\ (\lambda_2 x),\ sen\ (\lambda_3 x),\ ...,\ sen\ (\lambda_n x)$$

éstas son ortogonales, cuando se cumple que:

$$\int_0^L sen\ (\lambda_i x)\ sen\ (\lambda_j x)\ dx = 0\ ,\ \ con:\ i \neq j$$

y tiene un valor determinado en un instante considerado.

Si la distribución de temperaturas Φ = f(x) es una función arbitraria se puede poner en función de una combinación lineal de funciones ortogonales, en la forma:

$$f(x) = B_1\ sen\ (\lambda_1 x) + B_2\ sen\ (\lambda_2 x) + ... + B_n\ sen\ (\lambda_n x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\ sen\ (\lambda_n x)$$

en la que los valores de B_i son constantes a determinar.

Si la serie anterior es convergente e integrable y la multiplicamos por, $sen\ (\lambda_n x)$, se obtiene:

$$\int_0^L f(x)\ sen\ (\lambda_n x)\ dx = B_1 \int_0^L sen\ (\lambda_1 x)\ sen\ (\lambda_n x)\ dx + ... + B_n \int_0^L sen^2\ (\lambda_n x)\ dx$$

Por definición de ortogonalidad se hacen cero todas las integrales del segundo miembro, menos la correspondiente al coeficiente B_n, por lo que:

$$B_n = \frac{\int_0^L f(x)\ sen\ (\lambda_n x)\ dx}{\int_0^L sen^2\ (\lambda_n x)\ dx} =$$

$$= \left| \int_0^L sen^2\ (\lambda_n x)\ dx = \frac{L}{2} - \frac{sen\ (\lambda_n L)\ cos\ (\lambda_n L)}{2\ \lambda_n} = \left\{ \lambda_n = \frac{\pi\ n}{L} \right\} = \frac{L}{2} \right| = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\ sen\ (\lambda_n x)\ dx$$

obteniéndose la siguiente distribución de temperaturas:

$$\Phi = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t} sen\ (\lambda_n x) \int_0^L f(x)\ sen\ (\lambda_n x)\ dx = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{L})^2 \alpha t}\ sen\ \frac{\pi\ n\ x}{L} \int_0^L f(x)\ sen\ \frac{\pi\ n\ x}{L}\ dx$$

que depende del tiempo t, de la posición x y de la distribución de temperaturas inicial f(x), que es conocida.

Si se considera $f(x) = \Phi_0$, el valor de B_n es:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\ sen\ (\lambda_n x)\ dx =$$

$$= \frac{2\ \Phi_0}{L} \int_0^L sen\ (\lambda_n x)\ dx = \frac{2\ \Phi_0}{L} \int_0^L sen\ (\frac{\pi\ n}{L}\ x)\ dx = \frac{2\ \Phi_0}{\pi\ n}\ \{1 - (-1)^n\} = \frac{4\ \Phi_0}{\pi\ n}$$

por lo que:

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{L})^2 \alpha t}\ sen\ \frac{\pi\ n\ x}{L} \int_0^L sen\ \frac{\pi\ n\ x}{L}\ dx = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\ \frac{\{1 - (-1)^n\}\ sen\ (\lambda_n x)}{n} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,..}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\ \frac{sen\ (\lambda_n x)}{n}$$

Si se pone en función del nº de Fo y de un parámetro adimensional de la posición $\xi = \frac{x}{L}$ *:*

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\pi\ n)^2 Fo}\ sen\ (\pi\ n\ x) \int_0^L sen\ \frac{\pi\ n\ x}{L}\ dx = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3..}^{\infty} e^{-(\pi n)^2 Fo}\ \frac{sen\ (\pi\ n\ x)}{n}$$

Si la distribución de temperaturas fuese, por ejemplo, de la forma, f(x) = a x, con, a = Cte, se obtiene:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\ sen\ (\lambda_n x)\ dx = \frac{2\ a}{L} \int_0^L x\ sen\ (\lambda_n x)\ dx = ... = \frac{2\ a\ L}{\pi\ n}\ (-1)^{n+1}$$

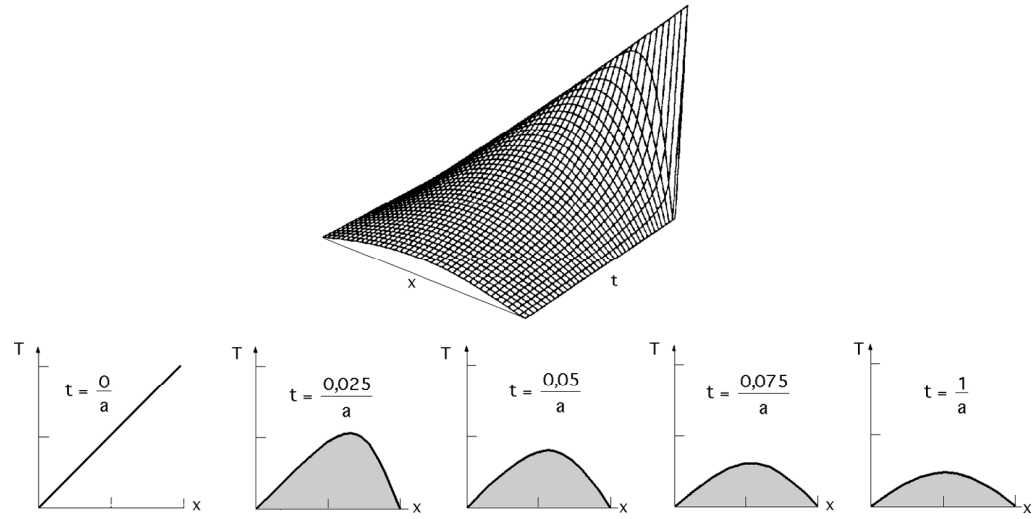


Fig V.2.- Desarrollo temporal de la distribución de temperaturas en una placa plana infinita, en régimen transitorio, con temperatura inicial de la forma, f(x)= at

$$\Phi = \frac{2\,a\,L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\pi n)^2 Fo}\ sen\,(\pi\, n\, \xi)\ \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

cuya representación gráfica exponemos en la Fig V.2.

El flujo térmico en el instante *t* es:

$$q = -k\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{2\,\Phi_0\ k}{\pi} \sum_{n=1,3...}^{\infty} e^{-(\pi n)^2 Fo}\ \frac{1-(-1)^n}{n}\ \frac{\pi\, n}{L} = \frac{4\,\Phi_0\ k}{L} \sum_{n=1,3...}^{\infty} e^{-(\pi n)^2 Fo} = \frac{4\,\Phi_0\ k}{L} \sum_{n=1,3...}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha\, t}$$

Estas series convergen muy rápidamente a menos que el nº de Fo sea muy pequeño.

Para Fo > 0,2 sólo es necesario conservar el primer término de la serie, cometiéndose un error menor del 2%. Para valores muy pequeños del nº de Fo < 0,2, (es decir, poco después de que la placa se haya sumergido en el líquido), la serie converge lentamente y es necesario conservar los suficientes términos del desarrollo para obtener un resultado exacto o hacer uso de la gráfica V.3.

Para, $Fo \rightarrow 0$, $lím\ q_{Fo \rightarrow 0} = \frac{k\,(T_0 - T_F)}{\sqrt{\pi\,\alpha\,t}}$, que es la expresión que se encuentra para el sólido semiinfinito, y que indica que la temperatura sólo cambia en una posición muy delgada cerca de la superficie, comportándose en esta zona como un sólido semiinfinito, mientras que la temperatura en el interior de la placa permanece constante; el proceso de la transmisión de calor se limita a esta delgada región y el espesor de la placa no afecta en absoluto, por cuanto L no aparece en la ecuación.

El calor Q que abandona la placa por las dos caras de contacto con el fluido (2A), en el intervalo de tiempo (0÷t), es:

$$Q = 2\,A \int_0^t q\ dt = \frac{4\,(T_0 - T_F)\,k\,A}{\pi} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\pi n)^2 Fo}\ \{1-(-1)^n\}\,dt =$$

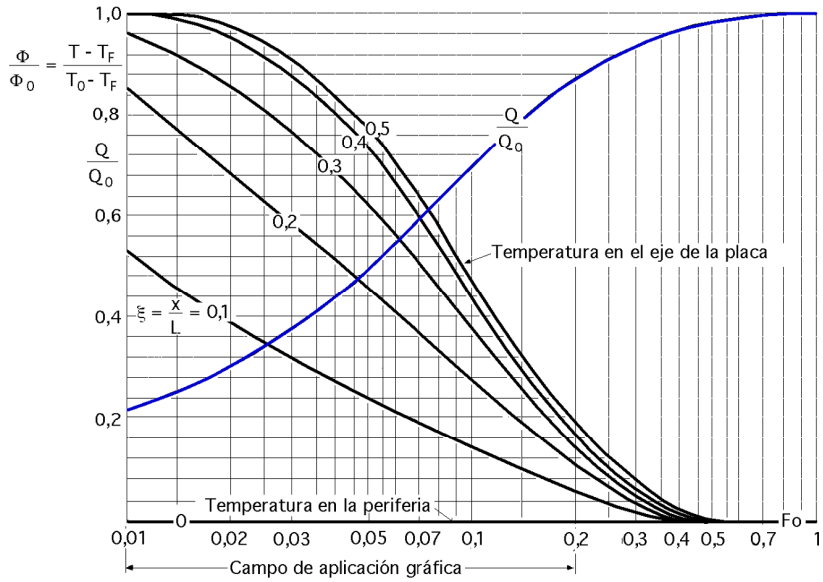


Fig V.3.- Abaco para la determinación gráfica de la temperatura y de Q/Q_0 en una placa plana infinita en régimen transitorio, con condición de contorno isotérmica y Fo < 0,2

$$= \frac{4\,(T_0 - T_F)\,k\,A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^2}{(\pi\,n)^2 \alpha} \left(e^{-(\pi n)^2 Fo} - 1\right) \{1 - (-1)^n\} = \frac{8\,(T_0 - T_F)\,k\,A\,L}{\alpha} \sum_{n=1,3\ldots}^{\infty} \frac{1 - e^{-(\pi\,n)^2 Fo}}{(\pi\,n)^2} =$$

$$= 8\,(T_0 - T_F)\,\rho\,c_p\,A\,L \sum_{n=1,3\ldots}^{\infty} \frac{1 - e^{-(\pi\,n)^2 Fo}}{(\pi\,n)^2} = \frac{8\,(T_0 - T_F)\,\rho\,c_p A}{L} \sum_{n=1,3\ldots}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2\,\alpha\,t}}{\lambda_n^2}$$

El calor Q_0 almacenado en la placa es, para $\begin{cases} x \geq 0 \\ T = T_F \end{cases}$, de la forma:

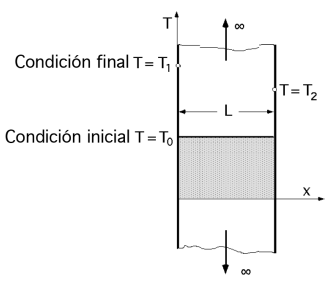
$$Q_0 = L\,A\,\rho\,c_p\;\Phi_0 = L\,A\,\rho\,c_p\,(T_0 - T_F) \quad y \quad \frac{Q}{Q_0} = 8 \sum_{n=1,3\ldots}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha\,t}}{(\pi\,n)^2}$$

El calor almacenado en la placa en el intervalo $t = 0$ a $t = t$, es:

$$Q = L\,A\,\rho\,c_p\;(\hat{T}_{Final} - T_0)$$

$$\hat{\Phi}_{Final} = \frac{1}{L} \int_0^L \Phi(x)\;dx \quad ; \quad \frac{\hat{T}_{Final} - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3\ldots}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \alpha\,t}}{n^2}$$

Caso particular 1.- Pared plana infinita inicialmente a T_0 que experimenta cambios instantáneos de temperatura en las superficies a T_1 y T_2 . El problema se resuelve mediante la superposición de un problema estacionario y otro transitorio, de forma que:



$$T(x,t) = T_1(x) - T_2(x,t) \quad \acute{o} \quad \Phi(x,t) = \Phi_1(x) - \Phi_2(x,t)$$

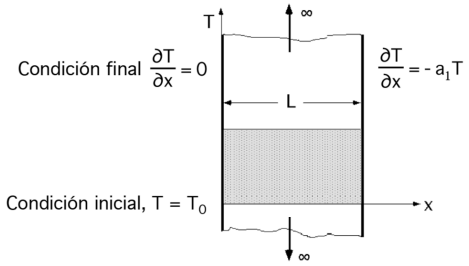
$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial t} = \alpha\,\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}$$

$T = T_0 \; ; \; 0 < x < L \; ; \; t = 0$
$T = T_1 \; ; \; x = 0 \; ; \; t > 0$
$T = T_2 \; ; \; x = L \; ; \; t > 0$

$$T(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_1 - (-1)^n \, T_2}{n} \{ 1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t} + \frac{2 \, T_0 \, e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{\lambda_n} \} \, sen \, (\lambda_n x) \quad ; \quad \lambda_n = \frac{(2\,n+1)\,\pi}{L}$$

.....

Caso particular 2.- Pared plana infinita inicialmente a T_0; una de sus superficies experimenta un aislamiento térmico y la otra intercambia calor con un fluido exterior



$$T = T_0 \; ; \; 0 < x < L \; ; \; t = 0$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \; ; \; x = 0 \; ; \; t > 0$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} = - a_1 \, T = - \frac{h_{cF}}{k} \, T \; ; \; x = L \; ; \; t > 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = - a_1 \, \Phi = - \frac{h_{cF}}{k} \, \Phi \; ; \; x = L \; ; \; t > 0$$

$$\frac{\Phi(x,\,t)}{\Phi_0} = 2 \, a_1 \, T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos \, (\lambda_n x) \, e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{\{L \, (\lambda_n^2 + a_1^2) + a_1 \} \, cos \, (\lambda_n L)} \quad ; \quad \lambda_n = \frac{(2\,n+1)\,\pi}{L}$$

.....

V.2.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN PARED CILÍNDRICA INFINITA CON CONDICIÓN DE CONTORNO ISOTÉRMICA.

Se considerará que en el cilindro infinito no existen efectos de borde, debido a que se le supone longitud infinita y, por lo tanto, que la conducción del calor se verifica en la dirección radial.

La ecuación diferencial que rige el proceso, en *coordenadas cilíndricas,* es:

$$\alpha \, \frac{1}{r} \, \frac{\partial}{dr} \, (\, r \, \frac{\partial T}{\partial r}) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad ; \quad \alpha \, (\frac{\partial^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \, \frac{\partial T}{\partial r}) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad ; \quad \alpha \, (\frac{\partial^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \, \frac{\partial \Phi}{\partial r}) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

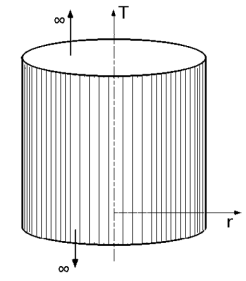


Fig V.4.- Cilindro infinito

con: $\Phi = T - T_F$

Si representamos Φ en la forma, $\Phi = R(r) \, \theta(t)$, resulta:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial r} \, \theta \quad ; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{dr^2} = \frac{\partial^2 R}{dr^2} \, \vartheta \quad ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \, R$$

$$\alpha \, (\frac{\partial^2 R}{dr^2} \, \theta + \frac{\theta}{r} \, \frac{\partial R}{\partial r}) = \frac{\partial \theta}{\partial t} \, R \quad ; \quad \frac{1}{R} \, (\frac{\partial^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \, \frac{\partial R}{\partial r}) = \frac{1}{\alpha \, \theta} \, \frac{\partial \theta}{\partial t} = - \lambda^2$$

Las ecuaciones diferenciales ordinarias resultantes y sus soluciones son:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \, \frac{dR}{dr} = - \lambda^2 R \quad \Rightarrow \quad R = B_1 \, J_0 (\lambda \, r) + B_2 \, Y_0 (\lambda \, r)$$

$$\frac{d\theta}{\theta} = - \lambda^2 \alpha \, dt \quad \Rightarrow \quad \theta = B_3 \, e^{- \lambda^2 \alpha t}$$

Como el cilindro no puede admitir en su eje (r = 0), una solución infinita, por cuanto $Y_0(0) = \infty$, resulta que B_2 tiene que ser cero, por lo que se obtiene una ecuación de la forma:

$$R = B_1 J_0(\lambda r)$$

La solución general que proporciona la distribución de temperaturas de la forma:

$$\Phi = B_3 \; e^{-\lambda^2 \alpha t} \; B_1 \; J_0(\lambda r) = B \; e^{-\lambda^2 \alpha t} \; J_0(\lambda \; r)$$

en la que B y λ son constantes, que habrá que determinar mediante las condiciones de contorno; $J_0(\lambda r)$ es la función de Bessel de primera especie y orden cero.

La condición inicial es: $\begin{cases} t = 0 \\ 0 \le r \le R \end{cases} \Rightarrow \quad \Phi = f(r) \;\; ó \;\; \Phi_0$

La condición de contorno *para un cambio brusco de la temperatura en la superficie lateral del cilindro infinito a,* $\Phi = T - T_F$ *, es:*

$$t > 0 \;\; ; \;\; \Phi_{r=R} = 0 = B \; e^{-\lambda^2 \alpha t} \; J_0(\lambda \; R) \;\; ; \;\; J_0(\lambda \; R) = 0 \;\; ; \;\; J_0(\lambda_n R) = 0$$

que se tiene que cumplir para cualquier valor de *t*.

Raices de las funciones de Bessel: $J_0(x) = 0$, *y* $J_1(x) = 0$

$J_0(x) = 0$	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711
$J_1(x) = 0$	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706	19,6159

Los valores de λ_n se calculan como raíces de la ecuación, $J_0(\lambda_n R) = 0$, con, n = 1, 2, 3,... obteniéndose una serie de valores que conforman un desarrollo en serie para la distribución de temperaturas, de la forma:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \; e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \; J_0(\lambda_n r)$$

Aplicando la condición inicial $\begin{cases} t = 0 \\ \Phi = f(r) \end{cases}$, resulta:

$$f(r) = B_1 \; J_0(\lambda_1 r) + B_2 \; J_0(\lambda_2 r) + \ldots + B_n \; J_0(\lambda_n r) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\lambda_n r)$$

Para que ésto sea así, es necesario que las funciones $J_0(\lambda_1 r)$, $J_0(\lambda_2 r)$, ... , $J_0(\lambda_n r)$, formen un agrupamiento ortogonal en el intervalo, $0 \le r \le R$, respecto a un factor ponderal *r*, de forma que:

$$\int_0^R r \; J_0(\lambda_i r) \, J_0(\lambda_j r) \; dr = 0, \;\; con: i \neq j$$

Si la serie es convergente e integrable, se tiene que:

$$\int_0^R r \, f(r) \, J_0(\lambda_n r) \; dr =$$

$$= B_1 \int_0^R r\ J_0(\lambda_1 r)\, J_0(\lambda_n r)\, dr + B_2 \int_0^R r\ J_0(\lambda_2 r)\, J_0(\lambda_n r)\ dr + \ldots + B_n \int_0^R r\ J_0^2(\lambda_n r)\ dr + \ldots$$

Por definición de ortogonalidad, todas las integrales del segundo miembro a excepción de la última, son cero, es decir:

$$\int_0^R r\, f(r)\, J_0(\lambda_n r)\ dr = B_n \int_0^R r\, J_0^2(\lambda_n r)\ dr \quad \Rightarrow$$

$$B_n = \frac{\int_0^R r\, f(r)\, J_0(\lambda_n r)\ dr}{\int_0^R r\, J_0^2(\lambda_n r)\ dr} = \left| \int_0^R r\ J_0^2(\lambda_n r)\ dr = \frac{R^2}{2}\{J_0^2(\lambda_n R) + J_1^2(\lambda_n R)\} = \frac{R^2\ J_1^2(\lambda_n R)}{2} \right| =$$

$$= \frac{\int_0^R r\, f(r)\, J_0(\lambda_n r)\ dr}{\frac{R^2\ J_1^2(\lambda_n R)}{2}}$$

obteniéndose la siguiente distribución de temperaturas:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^R r\, f(r)\, J_0(\lambda_n r)\, dr}{\frac{R^2\ J_1^2(\lambda_n R)}{2}}\ e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\ J_0(\lambda_n r) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\ \frac{J_0(\lambda_n R)}{J_1^2(\lambda_n R)} \int_0^R r\, f(r)\, J_0(\lambda_n r)\, dr$$

en la que $J_1(\lambda_n R)$ es la función de Bessel de primera especie y orden uno.

Si la distribución de la temperatura inicial es uniforme, $\Phi_0 = T_0 - T_F$

$f(r) = \Phi(r, 0) = \Phi_0 = Cte,$ *para:* $0 \le r \le R$

Teniendo en cuenta que $J_0(\lambda_n R) = 0$, resulta:

$$\int_0^R r\ J_0(\lambda_n r)\ dr = \frac{R}{\lambda_n}\ J_1(\lambda_n R)$$

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\ \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n\ J_1(\lambda_n R)}$$

siendo la temperatura T_c en el eje del cilindro (r = 0) para: $\Phi_c = T_c - T_F$:

$$\frac{\Phi_c}{\Phi_0} = \frac{T_c - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{\lambda_n\ J_1(\lambda_n R)}$$

El flujo de calor es:

$$q = -k \left.\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right\rangle_{r=R} = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial r} J_0(\lambda_n r) = -\lambda_n\ J_1(\lambda_n r) \\ \left.\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right\rangle_{r=R} = 2\,\Phi_0 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\ \frac{-\lambda_n\ J_1(\lambda_n R)}{\lambda_n\ R\ J_1(\lambda_n R)} = \frac{-2\,\Phi_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2\ \alpha\ t} \end{array} \right| = -k\ \frac{2\,\Phi_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t}$$

y el calor Q que llega a $(r = R)$, en el intervalo $(0 \div t)$ es:

$$Q = A \int_0^t q\, dt = -4\pi k L \Phi_0 \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\, dt = \ldots = -4\pi k L \Phi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{\lambda_n^2 \alpha}$$

El calor Q_0 almacenado inicialmente en el cilindro a Φ_0 es:

$$\frac{Q_0}{L} = \pi R^2 \rho c_p \Phi_0 = \frac{\pi R^2 k}{\alpha} \Phi_0$$

y la fracción de energía perdida:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{-k\ 2\pi R \int_0^t (\frac{\partial \Phi}{\partial r})_{r=R}\, dt}{\pi R^2 \rho c_p \Phi_0} = -\frac{2\alpha}{R \Phi_0} \int_0^t (\frac{\partial \Phi}{\partial r})_{r=R}\, dt = \left| J_0(\lambda_n R) = 0 \right| =$$

$$= \frac{4\alpha}{R^2} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t} dt = -\frac{4\alpha}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{\lambda_n^2 \alpha} \Big\rangle_0^t = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{(\lambda_n R)^2}$$

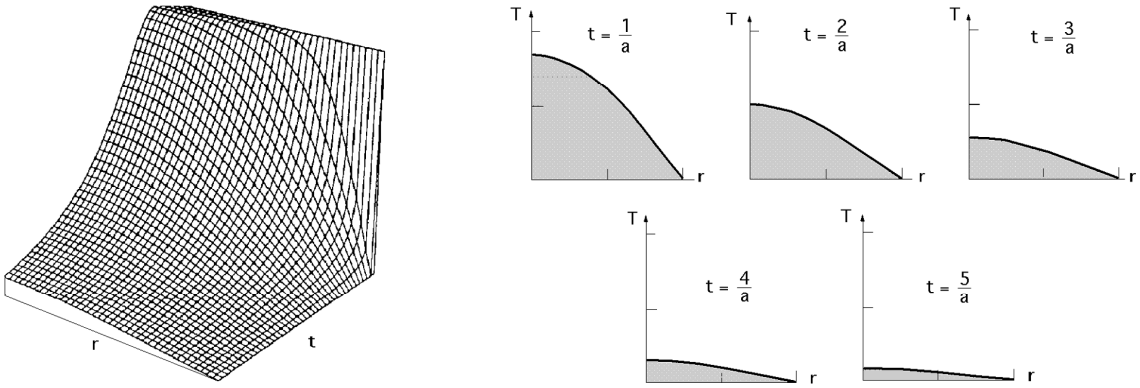


Fig V.5.- Desarrollo temporal de la distribución de temperaturas en conducción transitoria, en un cilindro infinito, con temperatura inicial constante

V.3.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN UNA ESFERA CON CONDICIÓN DE CONTORNO ISOTÉRMICA.

Para estudiar la distribución de temperaturas en una esfera que se calienta, o enfría instantáneamente en su superficie, se parte de: $\alpha (\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$, en la que r es el radio correspondiente a un punto cualquiera de la esfera.

La solución general es de la forma:

$$\Phi = B e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \frac{sen(\lambda r)}{\lambda r}$$

con las siguientes condiciones de contorno: $\begin{cases} t = 0\ ;\ r \le R\ \ ;\ \ \Phi(r,0) = \Phi = f(r) \ \ \acute{o} \ \ \Phi(r,0) = \Phi_0 \\ t > 0\ ;\ \Phi_{r=R} = 0 \end{cases}$

Aplicando la segunda condición se obtiene:

$$\Phi = 0 = B\, e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\, \frac{sen\,(\lambda\, R)}{\lambda\, R} \quad \Rightarrow \quad sen\,(\lambda\, R) = 0$$

que se debe cumplir para cualquier valor de *t*, por lo que habrá ∞ soluciones, deduciéndose de ella la relación que define las λ en la forma:

$$sen\,(\lambda_n R) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{\pi\, n}{R}$$

La solución general de la distribución de temperaturas es:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\, \frac{sen\,(\lambda_n r)}{\lambda_n r}$$

Para determinar la constante B_n aplicamos la primera condición de contorno: $\begin{cases} t = 0 \\ \Phi = f(r) \end{cases}$

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, \frac{sen\,(\lambda_n r)}{\lambda_n r} = B_1\, \frac{sen\,(\lambda_1 r)}{\lambda_1 r} + B_2\, \frac{sen\,(\lambda_2 r)}{\lambda_2 r} + \ldots + B_n\, \frac{sen\,(\lambda_n r)}{\lambda_n r}$$

y haciendo uso de las propiedades de las funciones ortogonales se tiene:

$$\int_0^R f(r)\,(\lambda_n r)\, sen\,(\lambda_n r)\, dr =$$

$$= B_1 \int_0^R \frac{\lambda_n r}{\lambda_1 r}\, sen\,(\lambda_1 r)\, sen\,(\lambda_n r)\, dr + \ldots + B_n \int_0^R \frac{\lambda_n r}{\lambda_n r}\, sen^2\,(\lambda_n r)\, dr = B_n \int_0^R sen^2\,(\lambda_n r)\, dr$$

despejando B_n y teniendo en cuenta que, $sen\,(\lambda_n\, R) = 0$, resulta:

$$B_n = \frac{\int_0^R f(r)\,(\lambda_n r)\, sen\,(\lambda_n r)\, dr}{\int_0^R sen^2\,(\lambda_n r)\, dr} = \frac{2}{R} \int_0^R f(r)\,(\lambda_n r)\, sen\,(\lambda_n r)\, dr$$

Los valores de B_n son distintos para cada superficie equipotencial, definida por *r*.

La ecuación general que proporciona la distribución de temperaturas de las superficies isotermas de radio *r* a lo largo del tiempo, es de la forma:

$$\Phi = \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\, \frac{sen\,(\lambda_n r)}{\lambda_n r} \int_0^R f(r)\,(\lambda_n r)\, sen\,(\lambda_n r)\, dr$$

Para: $f(r) = \Phi_0$ se tiene:

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\, \frac{sen\,(\lambda_n r)}{\lambda_n r} \left\{ \frac{-(\lambda_n r)\, cos\,(\lambda_n r) + sen\,(\lambda_n r)}{\lambda_n} \right\}_0^R =$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} -cos\,(\pi\, n)\, e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\, \frac{sen\,(\frac{\pi\, n\, r}{R})}{\frac{\pi\, n\, r}{R}} = \left| cos\,(\pi\, n) = (-1)^n \right| = \frac{2\, R}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} -(-1)^n\, e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\, \frac{sen\,(\frac{\pi\, n\, r}{R})}{n\, r}$$

Si la temperatura en el centro de la esfera (r = 0) es T_C, sale una indeterminación de la forma

(0/0), por lo que aplicando la regla de L'Hôpital se obtiene:

$$\frac{\Phi_C}{\Phi_0} = -\ 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n^2 \alpha t}$$

La disipación de calor adimensional es:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{-\ k\ 4\ \pi\ R^2 \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_{r=R} dt}{\frac{4\ \pi\ R^3}{3}\ \rho\ c_p\ \Phi_0} = -\ \frac{3\ k}{R\ \rho\ c_p\ \Phi_0} \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_{r=R}\ dt =$$

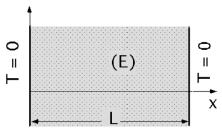
$$= -\ \frac{6\ k}{\pi\ \rho\ c_p}\ \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\ e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\ \frac{\cos\left(\frac{\pi\ n\ r}{R}\right)\ \frac{\pi\ n}{R}\ (n\ r) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\ n\ r}{R}\right) n}{n^2 R^2} \Big\rangle_{r=R}\ dt =$$

$$= \frac{6\ k}{\pi\ \rho\ c_p}\ \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\ \frac{(-1)^n \pi\ n^2}{n^2 R^2}\ dt = \frac{6\ k}{\rho\ c_p\ R^2}\ \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\ dt = \frac{-\ 6\ k}{\rho\ c_p\ R^2}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{\lambda_n^2\ \alpha} \Big\rangle_0^t =$$

$$= \frac{-\ 6\ k}{\rho\ c_p\ R^2}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \alpha t} - 1}{\lambda_n^2\ \alpha} = \frac{-\ 6\ k}{\rho\ c_p\ R^2}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \alpha t} - 1}{\left(\frac{\pi\ n}{R}\right)^2 \alpha} = \frac{6\ k}{\pi^2 \alpha\ \rho\ c_p}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{n^2}$$

V.5.- TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONDUCCIÓN EN RÉGIMEN TRANSITORIO CON GENERACIÓN DE CALOR E

a) Pared plana infinita con generación de calor E; condición de contorno isotérmica.

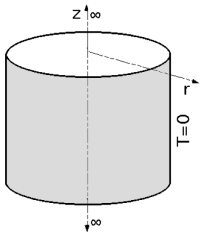


$$\text{Condiciones de contorno:}\ \begin{cases} t = 0\ ;\ \Phi = \Phi_0\ ;\ 0 \le x \le L \\ t > 0\ \begin{cases} x = 0\ ;\ \Phi_0 = 0 \\ E = Cte \end{cases} \end{cases}$$

$$\Phi(x, t) = \frac{4\ E\ L^2}{\pi^3\ k}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda_n x)}{n^3}\ (1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t})\ ,\ con:\ n = 1, 3, 5, \ldots\ ;\ \lambda_n = \frac{\pi\ n}{L}$$

.....

b) Cilindro infinito con generación de calor E; condición de contorno isotérmica.



$$\text{Condiciones de contorno:}\ \begin{cases} t = 0\ ;\ \Phi = \Phi_0\ ;\ 0 \le r \le R \\ t > 0\ \begin{cases} r = R\ ;\ \Phi_0 = 0 \\ E = Cte \end{cases} \end{cases}$$

$$\Phi(r, t) = \frac{4\ E}{R\ k}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^3\ J_1(\lambda_n R)}\ (1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t})\ ,\ con\ \lambda_n\ raíces\ de:\ J_0(\lambda_n R) = 0$$

.....

c) Esfera con generación de calor E; condición de contorno isotérmica

$$\text{Condiciones de contorno:}\ \begin{cases} t = 0\ ;\ \Phi = \Phi_0\ ;\ 0 \le r \le R \\ t > 0\ \begin{cases} r = R\ ;\ \Phi_0 = 0 \\ E = Cte \end{cases} \end{cases}$$

$$\Phi(r, t) = \frac{2\ E}{k}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda_n r)}{\lambda_n^3\ r}\ (1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t})\ (-1)^n\ ;\quad \lambda_n = \frac{\pi\ n}{R}$$

.....

Valores de las funciones de Bessel $J_0(x)$ y $J_1(x)$

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0,00	1,0000	0,0000	1,65	0,4267	0,5743	3,30	-0,3443	0,2206	5,10	-0,1443	-0,3371
0,05	0,9993	0,0249	1,70	0,3979	0,5777	3,35	-0,3548	0,2000	5,20	-0,1103	-0,3432
0,10	0,9975	0,0499	1,75	0,3690	0,5801	3,40	-0,3643	0,1792	5,30	-0,0758	-0,3460
0,15	0,9943	0,0747	1,80	0,3399	0,5815	3,45	-0,3727	0,1583	5,40	-0,0412	-0,3453
0,20	0,9900	0,0995	1,85	0,3109	0,5818	3,55	-0,3864	0,1164	5,50	-0,0068	-0,3414
0,25	0,9844	0,1240	1,90	0,2818	0,5811	3,65	-0,3960	0,0745	5,60	0,0270	-0,3343
0,30	0,9776	0,1483	1,95	0,2528	0,5794	3,70	-0,3923	0,0538	5,70	0,0599	-0,3241
0,35	0,9696	0,1723	2,00	0,2238	0,5767	3,75	-0,4014	0,0332	5,80	0,0917	-0,3110
0,40	0,9604	0,1960	2,05	0,1951	0,5730	3,80	-0,4025	0,0128	5,90	0,1220	-0,2951
0,45	0,9500	0,2193	2,10	0,1666	0,5682	3,85	-0,4026	-0,0073	6,00	0,1506	-0,2767
0,50	0,9384	0,2422	2,15	0,1383	0,5626	3,90	-0,4018	-0,0272	6,10	0,1773	-0,2559
0,55	0,9257	0,2647	2,20	0,1103	0,5559	3,95	-0,3999	-0,0468	6,20	0,2017	-0,2329
0,60	0,9120	0,2867	2,25	0,0827	0,5483	4,00	-0,3971	-0,0660	6,30	0,2238	-0,2081
0,65	0,8971	0,3081	2,30	0,0555	0,5398	4,05	-0,3933	-0,0848	6,40	0,2433	-0,1816
0,70	0,8812	0,3290	2,35	0,0287	0,5304	4,10	-0,3886	-0,1032	6,50	0,2601	-0,1538
0,75	0,8642	0,3492	2,40	0,0025	0,5201	4,15	-0,3830	-0,1212	6,6	0,2740	-0,1250
0,80	0,8462	0,3688	2,45	-0,0232	0,5090	4,20	-0,3765	-0,1386	6,8	0,2931	-0,0625
0,85	0,8273	0,3877	2,50	-0,0483	0,4970	4,25	-0,3692	-0,1555	7,0	0,3001	-0,0047
0,90	0,8075	0,4059	2,55	-0,0729	0,4843	4,30	-0,3610	-0,1719	7,2	0,2951	0,0543
0,95	0,7867	0,4233	2,60	-0,0968	0,4708	4,35	-0,3520	-0,1876	7,4	0,2786	0,1096
1,00	0,7652	0,4400	2,65	-0,1199	0,4565	4,40	-0,3422	-0,2027	7,6	0,2516	0,1592
1,05	0,7428	0,4559	2,70	-0,1424	0,4416	4,45	-0,3370	-0,2172	7,8	0,2554	0,2014
1,10	0,7196	0,4709	2,75	-0,1641	0,4259	4,50	-0,3205	-0,2310	8,0	0,1717	0,2346
1,15	0,6957	0,4950	2,80	-0,1850	0,4097	4,55	-0,3086	-0,2441	8,2	0,1222	0,2580
1,20	0,6711	0,4982	2,85	-0,2051	0,3928	4,60	-0,2961	-0,2565	8,4	0,0692	0,2708
1,25	0,6459	0,5106	2,90	-0,2243	0,3754	4,65	-0,2830	-0,2681	8,6	0,0146	0,2728
1,30	0,6200	0,5220	2,95	-0,2426	0,3574	4,70	-0,2693	-0,2790	8,8	-0,0392	0,2641
1,35	0,5937	0,5324	3,00	-0,2600	0,3390	4,75	-0,2551	-0,2891	9,0	-0,0903	0,2453
1,40	0,5668	0,5419	3,05	-0,2765	0,3201	4,80	-0,2404	-0,2985	9,2	-0,1368	0,2147
1,45	0,5395	0,5504	3,10	-0,2920	0,3009	4,85	-0,2252	-0,3070	9,4	-0,1768	0,1816
1,50	0,5118	0,5579	3,15	-0,3066	0,2812	4,90	-0,2097	-0,3146	9,6	-0,2090	0,1395
1,55	0,4837	0,5644	3,20	-0,3201	0,2613	4,95	0,1938	0,3215	9,8	-0,2323	0,0928
1,60	0,4554	0,5699	3,25	-0,3327	0,2411	5,00	-0,1776	-0,3275	10,0	-0,2459	0,0435