IV.- FLUJO INCOMPRESIBLE NO VISCOSO

pfernandezdiez.es

IV.1.- CINEMÁTICA DE FLUIDOS

La Cinemática de Fluidos tiene una correspondencia biunívoca con el Primer Principio de la Termodinámica aplicado a sistemas abiertos. En un fluido en movimiento, cada partícula posee una velocidad $\vec{V}$ que depende de la posición (x,y,z) de dicha partícula y del tiempo t, es decir:

$$V = f(x, y, z, t)$$

y sus proyecciones sobre los tres ejes son función también de dichas variables, viniendo representadas por:

$$\begin{cases} u = u\,(x, y, z, t) \\ v = v\,(x, y, z, t) \\ w = w\,(x, y, z, t) \end{cases}$$

Se llama movimiento permanente o estacionario a aquel en que sus características, como la presión, velocidad, etc, son independientes del tiempo, es decir, son sólo función de la posición (x,y,z)

$$p = f_1(x,y,z)$$

$$V = f_2(x, y, z) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = u\,(x, y, z) \\ v = v\,(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{cases}$$

La *trayectoria* es el lugar geométrico de las posiciones ocupadas por una misma partícula, cuando varía el tiempo t.

Si en un instante dado se asigna a cada punto un vector representando, la velocidad en dicho punto, se obtiene un conjunto de vectores llamado *campo de velocidades*.

La *línea de corriente* ψ es una línea tangente, en cada uno de sus puntos, a la velocidad en ese punto y en el instante considerado; la línea de corriente satisface la condición:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

En general, las líneas de corriente varían de un instante a otro; en un movimiento permanente son fijas y coinciden con las trayectorias.

Se dice que en un punto, línea, superficie o volumen, existe un *manantial*, cuando en dicho punto, línea, superficie o volumen aparecen ciertas cantidades de fluido que a partir del momento en que aparecen participan en la circulación. Un *sumidero* en un punto, línea, superficie o volumen es aquel en que desaparecen ciertas cantidades de fluido que antes habían participado en la circulación.

Un flujo se representa gráficamente mediante las líneas de corriente, que son las envolventes de los vectores velocidad de las partículas fluidas del flujo; cuando el flujo es *permanente*, las partículas fluidas se mueven a lo largo de trayectorias coincidentes con las líneas de corriente ψ.

Si el flujo no es permanente, (régimen transitorio), una configuración de líneas de corriente indica únicamente la representación instantánea del flujo, y en este caso no existe, en general, una correspondencia tan sencilla entre las trayectorias y las líneas de corriente ψ.

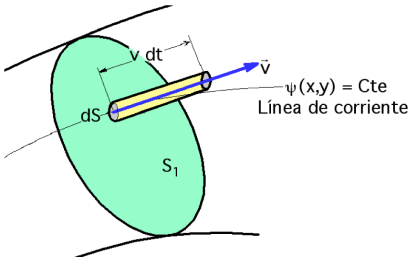


Fig IV.1.- Tubo de flujo

El conjunto de las líneas de corriente que pasan por el contorno de un área infinitesimal, en un instante determinado, forma un tubo de fluido que se conoce como *tubo de corriente o filete fluido*, Fig IV.1, y es de gran utilidad en el estudio de los fenómenos fluidos. De la definición de línea de corriente es evidente que no existe paso de flujo a través de la superficie lateral del tubo de corriente; un tubo de corriente se comporta como un conducto de paredes impermeables y espesor nulo, de sección recta infinitesimal.

Un número infinito de tubos de corriente adyacentes, da lugar a un tubo de sección recta finita, que se conoce frecuentemente como *vena fluida*. El método de estudio se puede realizar a partir del concepto de *campo de velocidades V(x, y, z, t)*, haciendo dos tipos de consideraciones:

a) Se pueden fijar las coordenadas (x_1, y_1, z_1) de un punto en las funciones que dan el campo de velocidades, expresándose la velocidad de las partículas móviles al pasar por dicho punto en el transcurso del tiempo; matemáticamente viene expresado por (x_1, y_1, z_1, t). Mediante esta técnica, conocido un punto fijo del espacio, las velocidades de las diversas partículas que pasan por ese punto, forman un continuo; este punto de vista se conoce como método de Euler.

b) Se puede estudiar una partícula genérica del flujo, siguiendo a dicha partícula, método de Lagrange, lo cual significa que (x, y, z) no permanecen constantes en la expresión V(x, y, z, t), sino que varían de forma continua, dando en cada instante la posición de la partícula genérica, por lo que, en este caso, las coordenadas espaciales serán función del tiempo; ambas consideraciones no dependen de si el campo es permanente o no.

Para un flujo bidimensional en coordenadas rectangulares:

- *El potencial de velocidades* φ *se define como:* $u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$; $v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$

- *La función corriente* ψ *se define como:* $u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$; $v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$

La derivada total de φ se puede poner en la forma:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy = u\, dx + v\, dy$$

Las *líneas equipotenciales* son aquellas a lo largo de las cuales la función φ es constante, es decir:

$$d\varphi = u\, dx + v\, dy = 0 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{v} = -\frac{dy}{u}$$

que proporciona el gradiente de la línea de potencial.

La derivada total de ψ es:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}\, dy = -v\, dx + u\, dy$$

Para una línea de corriente, función de corriente constante ψ, resulta:

$$d\psi = -v\, dx + u\, dy = 0 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{v} = \frac{dx}{u}$$

que es la ecuación diferencial de las líneas de corriente para el flujo bidimensional.

Construcción gráfica de las líneas de corriente y de movimiento.- En la red ortogonal constituida por las líneas, φ = Cte, ψ = Cte, vamos a considerar una línea de corriente ψ_1 y otra equipotencial φ_1 pasan por el punto O de la Fig IV.2, y por otra, la línea de corriente $\psi_1 + d\psi_1$, y la equipotencial $\varphi_1 + d\varphi_1$. Si consideramos como origen de coordenadas el punto O y por él trazamos las tangentes $\vec{s}$ y $\vec{n}$, a ψ_1 y φ_1, respectivamente, puesto que la velocidad se proyecta en verdadera magnitud sobre el eje Os por cuanto éste es tangente a la línea de corriente, las relaciones obtenidas para la velocidad $\vec{u}$, que son:

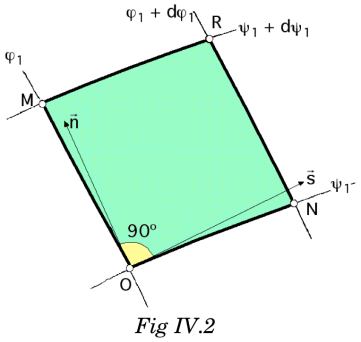


Fig IV.2

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \ \textit{se transforman en,}\ u = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

y escogiendo para $d\psi$ y $d\varphi$ valores iguales, los valores de *ds* y *dn* también serán iguales, con lo que la malla elemental será un cuadrado.

Esto permite la construcción gráfica de la red de líneas de corriente y equipotenciales, a partir de una línea de corriente de la distribución del potencial a lo largo de esta línea de corriente y de las equipotenciales extremas. Este método se conoce como *método de Präsil*, Fig IV.3.

Si suponemos una línea de corriente $\psi = \psi_1$, y sobre la misma dos puntos A_1 y A_2 lo suficientemente próximos como para que el arco (A_1A_2) se pueda confundir con la recta, ($\overline{A_1A_2}$) = a.

Si φ_1 es el potencial en el punto A_1 y, $\varphi_1 + \Delta\varphi$, el potencial en el punto A_2, el potencial en el B, punto medio del segmento ($\overline{A_1A_2}$) es: $\varphi_1 + \frac{\Delta\varphi}{2}$

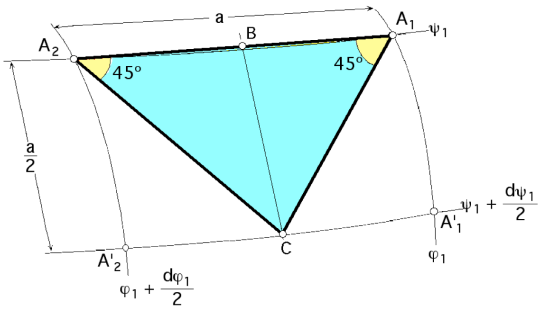


Fig IV.3

La normal al segmento ($\overline{A_1A_2}$) en el punto M_1 es la tangente a la línea equipotencial que pasa por B.

En el punto C sobre la normal, tal que $\overline{BC} = \frac{a}{2}$, el potencial es $\varphi_1 + \frac{\Delta\varphi}{2}$, y de acuerdo con la ecuación:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\psi}{\partial n}$$

la línea de corriente que pasa por C tiene una cota de valor $\varphi_1 + \frac{\Delta\varphi}{2}$; de aquí se deduce la construcción gráfica de la red, Fig IV.4.

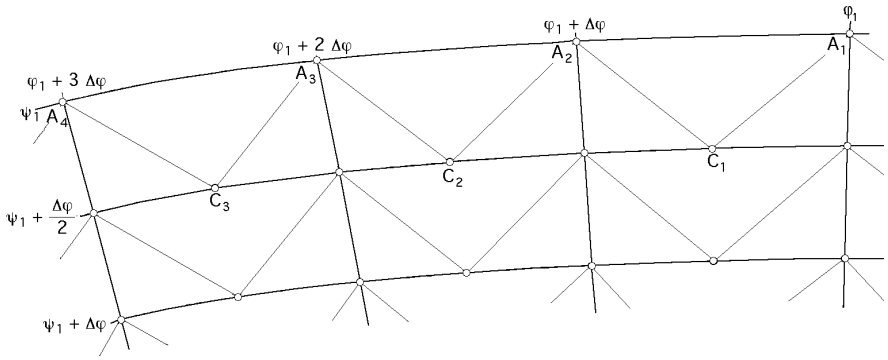


Fig IV.4.- Trazado de las líneas de corriente

Sobre la línea de corriente ψ_1 se toman los puntos A_1, A_2..., tales que correspondan a potenciales en progresión aritmética de razón $\Delta\varphi$. Por cada uno de los puntos A_1, A_2..., se trazan a un mismo lado de la línea de corriente, dos semirrectas que forman 45° con la línea de corriente y que se cortan en los puntos C_1, C_2, ..., siendo el lugar geométrico de los puntos C la línea de corriente de cota $\varphi_1 + \frac{\Delta\varphi}{2}$

Si trazamos desde los puntos A_1, A_2..., las perpendiculares (A_1 A_1'), (A_2 A_2'), ..., a la línea de corriente ψ_1 se podrá graduar a la línea $\varphi_1 + \frac{\Delta\varphi}{2}$ en potenciales; a partir de esta nueva línea se construirá otra $\varphi_1 + \Delta\varphi$, así como los puntos equipotenciales A_1", A_2"..., cubriéndose de esta forma el dominio a estudiar con líneas de corriente y equipotenciales.

El trazado de las líneas de corriente debe respetar la condición de ortogonalidad a las equipo-

tenciales que limitan el campo y la conservación del potencial sobre las equipotenciales. El método es válido si se invierte el papel de las equipotenciales y líneas de corriente.

Funciones armónicas, son aquellas que tienen sus derivadas primeras regulares en un dominio y que satisfacen la ecuación de Laplace $\Delta\varphi = 0$. La suma de dos funciones armónicas es otra función armónica lo que implica que se pueden superponer dos movimientos con potencial de velocidades, sumando sus potenciales.

IV.2.- CAUDAL A TRAVÉS DE UNA SUPERFICIE ELEMENTAL

En general, el caudal Q de una corriente para una sección determinada, es el volumen de fluido que la atraviesa en la unidad de tiempo, m^3/seg. Si se considera un tubo de corriente de sección S_1 normal en cada uno de sus puntos a la línea de corriente correspondiente, y un elemento infinitesimal de sección dS, el volumen de fluido que pasa por dS en el tiempo dt es *(V dS dt)* ya que *(V dt)* es la longitud de este tubo de corriente infinitesimal, Fig IV.1.

Por la sección S_1 pasa un volumen de fluido:

$$dW = \int_{S_1} V\, dS\, dt = dt \int_{S_1} V\, dS$$

y como se ha definido el caudal Q, como el volumen de fluido que pasa por la sección S_1 en la unidad de tiempo, resulta:

$$Q = \frac{dW}{dt} = \int_{S_1} V\, dS$$

Cuando S_1 no sea perpendicular a la línea de corriente en cada punto, el caudal es:

$$Q = \int_{S_1} V_n dS = \int_{S_1} V \cos\theta\, dS$$

La velocidad media correspondiente a la sección S_1 es: $\hat{V} = \dfrac{\int_{S_1} V_n\, dS}{S_1} = \dfrac{Q}{S_1}$

Un elemento de volumen no sigue las líneas de corriente, sino las de movimiento; sólo coincidirán cuando el campo de velocidades sea estacionario.

IV.3.- ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Si se considera en un fluido en movimiento un paralelepípedo fijo e invariable Fig IV.5, de volumen, *(dx dy dz)*, en el tiempo *t* contiene una masa M de fluido de la forma, $\rho\ dx\ dy\ dz$; en el transcurso de un tiempo dt, el valor de la masa es $M + \dfrac{\partial M}{\partial t}\ dt$, el valor de ρ se modifica a $\rho + \dfrac{\partial \rho}{\partial t}$, permaneciendo invariable el volumen *(dx dy dz)*; la variación de masa en el volumen citado en el tiem-

po dt es, $\frac{\partial \rho}{\partial t}\, dt\, dx\, dy\, dz$

Este incremento procede de la masa entrante por las $\begin{cases} \text{- seis caras del paralelepípedo} \\ \text{- fuentes contenidas en el volumen infinitesimal} \end{cases}$

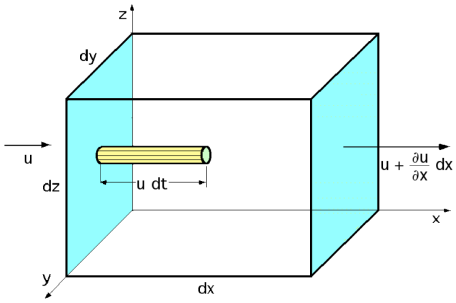


Fig IV.5.- Paralelepípedo elemental de fluido

- Por la cara (dy dz) entra en el tiempo dt una masa de fluido:

$\rho\ u\ dt\ dy\ dz$

- Por la cara opuesta sale:

$\{ \rho\ u + \frac{\partial (\rho\ u)}{\partial x}\ dx \}\ dt\ dy\ dz$

Por el conjunto de las dos caras perpendiculares al eje Ox se produce una variación de la masa de fluido:

$$- \frac{\partial (\rho\ u)}{\partial x}\ dt\ dx\ dy\ dz$$

siendo la variación de las masas de fluido entrantes y salientes por el conjunto de las seis caras:

$$- (\frac{\partial (\rho\ u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho\ v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho\ w)}{\partial z})\ dt\ dx\ dy\ dz$$

A su vez, la variación de masa por unidad de volumen debida a los manantiales y sumideros, en el tiempo dt, la representamos por el caudal q, de la forma:

$$q = \sum_{i=1}^{n} q_1^i - \sum_{j=1}^{m} q_2^j \text{ , siendo: } \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} q_1^i \text{ , la suma de los caudales debidos a los sumideros} \\ \sum_{j=1}^{m} q_2^j \text{ , la suma de los caudales debidos a los manantiales} \end{cases}$$

La variación de masa debida a los manantiales y sumideros es: $\rho\ q\ dt\ dy\ dz$ por lo que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\ dt\ dx\ dy\ dz = - (\frac{\partial (\rho\ u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho\ v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho\ w)}{\partial z})\ dt\ dx\ dy\ dz + \rho\ q\ dt\ dx\ dy\ dz$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\frac{\partial (\rho\ u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho\ v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho\ w)}{\partial z}) = \rho\ q \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + div\ (\rho\ \vec{V}) = \rho\ q$$

que es la expresión general de la ecuación de continuidad.

Para el caso en que no existan manantiales ni sumideros, $q = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\frac{\partial (\rho\ u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho\ v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho\ w)}{\partial z}) = 0$$

Para fluidos incompresibles, ρ = Cte ;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad ; \quad div\ \vec{V} = 0$$

CASOS PARTICULARES

a) Si el fluido se mueve paralelamente al eje Ox, *las componentes de la velocidad son:*

$u = u \;\; ; \;\; v = 0 \;\; ; \;\; w = 0$

y la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial(\rho\, u)}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \rho\, u = Cte \quad ; \quad \rho\, g\, u = C' \quad ; \quad \gamma\, u = C'$$

Como:

$$\gamma\, u = \frac{Peso}{Volumen}\frac{Espacio}{Tiempo} = \frac{Peso}{Tiempo}\frac{Espacio}{Volumen} = \frac{G}{S} \quad \Rightarrow \quad G = \gamma\, S\, u$$

b) Si el movimiento del fluido es irrotacional, $rot\, \vec{V} = 0$, y como $\vec{V} = -\, grad\, \varphi = -\nabla\varphi$, por derivar de un potencial, se tiene que:

$$div\, \vec{V} = div\,(-\nabla j) = \Delta j \quad \Rightarrow \quad div\, \vec{V} + \Delta\varphi = 0 \quad (Ec.\ de\ Poisson)$$

Si $\begin{cases} div\, \vec{V} = 0 \\ \Delta\varphi = 0 \end{cases}$ (ecuación de Laplace), el movimiento es conservativo, permanente e incompresible

Para un movimiento plano irrotacional, la ecuación de las líneas de corriente es $\psi(x,y) = Cte$, y forman una red ortogonal con las líneas equipotenciales dadas por $\varphi(x, y) = Cte$:

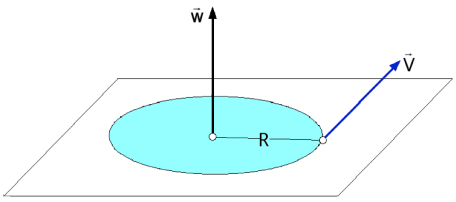


Fig IV.6.- Rotor

$$\Delta\varphi = 0 \;\; ; \;\; \Delta\psi = 0 \;\; ; \;\; u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \;\; ; \;\; v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\,\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

El caudal q que pasa entre dos líneas de corriente ψ_1 *y* ψ_2 *es:*

$q = \psi_2 - \psi_1$

La longitud de un arco de línea equipotencial es: $d\varphi = V\, dS$

La longitud de un arco de línea de corriente es: $d\psi = V\, dS$

El vector torbellino $\vec{b}$ es igual a la velocidad angular instantánea: $\vec{w} = \frac{1}{2}\, rot\, \vec{V} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$

$$Como: \;\; \vec{V} = \vec{w} \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ w_x & w_y & w_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}\,(w_y z - w_z y) + \vec{j}\,(w_z x - w_x z) + \vec{k}\,(w_x y - w_y x)$$

$$resulta: \; rot\, \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ (w_y z - w_z y) & (w_z x - w_x z) & (w_x y - w_y x) \end{vmatrix} = 2\, w_x \vec{i} + 2\, w_y \vec{j} + 2\, w_z \vec{k} = 2\, \vec{b}$$

El vector torbellino representa la velocidad angular instantánea: $\vec{w} = \vec{b} = \frac{1}{2}\, rot\, \vec{V}$

IV.4.- TORBELLINOS CILÍNDRICOS

Interesa calcular la componente z del vector $\vec{b}$; dicho vector se poner en la forma:

$$\vec{b} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \{ (\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}) \vec{i} + (\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) \vec{j} + (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) \vec{k} \}$$

por lo que la componente $b_z = \frac{1}{2} (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})$

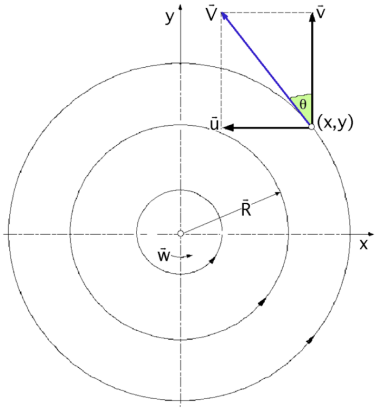


Fig IV.7.- Torbellino cilíndrico

De acuerdo con la Fig IV.7: $\begin{cases} u = - V\, sen\, \theta = - V\, \frac{y}{R} \\ v = V\, cos\, \theta = V\, \frac{x}{R} \end{cases}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{V}{R} - y\, \frac{\frac{\partial V}{\partial R}\, \frac{\partial R}{\partial y}\, R - V\, \frac{\partial R}{\partial y}}{R^2} = - \frac{V}{R} - \frac{y}{R}\, \frac{\partial V}{\partial R}\, \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{V}{R^2}\, y\, \frac{\partial R}{\partial y} =$$

$$= \left| \begin{matrix} R^2 = x^2 + y^2 \\ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{y}{R} \end{matrix} \right| = - \frac{V}{R} - \frac{y^2}{R^2}\, \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V\, y^2}{R^3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{V}{R} + x\, \frac{\frac{\partial V}{\partial R}\, \frac{\partial R}{\partial x}\, R - V\, \frac{\partial R}{\partial x}}{R^2} = \frac{V}{R} + \frac{x}{R}\, \frac{\partial V}{\partial R}\, \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{V}{R^2}\, x\, \frac{\partial R}{\partial x} = \left| \begin{matrix} R^2 = x^2 + y^2 \\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x}{R} \end{matrix} \right| = - \frac{V}{R} - \frac{x^2}{R^2}\, \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V\, x^2}{R^3}$$

$$b_z = \frac{1}{2} (\frac{V}{R} + \frac{x^2}{R^2}\, \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V\, x^2}{R^3} + \frac{V}{R} + \frac{y^2}{R^2}\, \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V\, y^2}{R^3}) = \frac{1}{2} (\frac{2\, V}{R} + \frac{x^2 + y^2}{R^2}\, \frac{\partial V}{\partial R} - V\, \frac{x^2 + y^2}{R^3}) =$$

$$= \frac{1}{2} (\frac{2\, V}{R} + \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R}) = \frac{1}{2} (\frac{V}{R} + \frac{\partial V}{\partial R}$$

que es la expresión que permite calcular la velocidad angular instantánea en cualquier tipo de torbellino cilíndrico.

IV.5.- ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO DE UN ELEMENTO DE VOLUMEN

Durante el movimiento, cada elemento de volumen de fluido experimenta cambios de posición y de orientación, que analizaremos a continuación.

Para ello vamos a considerar un elemento de volumen en el instante t, que contiene a los puntos $\begin{cases} M\,(x, y, z) \\ M'(x + h, y + k, z + l) \end{cases}$ muy próximos entre sí.

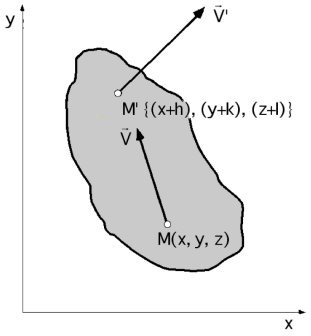


Fig IV.8

Si la velocidad en el punto M es $\vec{V}(u, v, w)$, la velocidad en el punto M' será $\vec{V}'(u',v',w')$, de la forma:

$$\vec{V}'(u', v', w') \Rightarrow \begin{cases} u' = u(x+h,\ y+k,\ z+l) = u + h\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + k\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + l\ \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ v' = v(x+h,\ y+k,\ z+l) = v + h\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + k\ \dfrac{\partial v}{\partial y} + l\ \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ w' = w(x+h,\ y+k,\ z+l) = w + h\ \dfrac{\partial w}{\partial x} + k\ \dfrac{\partial w}{\partial y} + l\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

en la que se han despreciado infinitésimos de orden superior.

Si consideramos la primera de estas ecuaciones, se puede poner en la forma:

$$u' = u + \frac{1}{2}\{l\,(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) - k\,(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\} + h\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\{k\,(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) + l\,(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})\}$$

y haciendo lo propio con las otras dos y llamando:

$$\xi = \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}) \quad ; \quad \eta = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) \quad ; \quad \zeta = \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})$$

$$g_1 = \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) \quad ; \quad g_2 = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \quad ; \quad g_3 = \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})$$

se obtiene:
$$\begin{cases} u' = u + (\eta\ l - \xi\ k) + h\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + k\ g_3 + l\ g_2 \\ v' = v + (\zeta\ h - \xi\ l) + k\ \dfrac{\partial v}{\partial y} + h\ g_3 + l\ g_1 \\ w' = w + (\xi\ k - \eta\ h) + l\ \dfrac{\partial w}{\partial z} + h\ g_2 + k\ g_1 \end{cases}$$

en las que el vector de proyecciones, ξ, η, ζ, es el vector torbellino del campo de velocidades, que sabemos vale:

$$\vec{\Gamma} = \vec{b} = \frac{1}{2}\ rot\ \vec{V}$$

La velocidad del punto M' se puede considerar como el resultado de la composición geométrica de tres velocidades:

a) Una velocidad en la que sus proyecciones u, v, w, se corresponden con una traslación en bloque de la partícula, a la velocidad $\vec{V}$.

b) Una velocidad en la que sus proyecciones son $\begin{cases} r_1 = \eta\ l - \zeta\ k \\ r_2 = \zeta\ h - \xi\ l \\ r_3 = \xi\ k - \eta\ h \end{cases}$ *, y que se corresponde con una rotación en bloque de velocidad angular* $\breve{\Gamma}$*, siendo estas proyecciones las componentes del producto vectorial:*

$$\frac{1}{2}\ rot\ \vec{V} \wedge \overline{MM'} = \vec{\Gamma} \wedge \overline{MM'}$$

c) Una velocidad en la que sus proyecciones son: $\begin{cases} d_1 = h\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + k\, g_3 + l\, g_2 \\ d_2 = h\, g_3 + k\ \dfrac{\partial v}{\partial y} + l\, g_1 \\ d_3 = h\, g_2 + k\, g_1 + l\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$, que se corresponden con una deformación $\vec{D}$. En consecuencia, $\vec{V}'$ se puede poner en la forma:

$$\vec{V}' = \vec{V} + \vec{\Gamma} \wedge \overline{MM}' + \vec{D}$$

demostrándose que $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial w}{\partial z}$ son las velocidades de deformación lineal.

Así, un elemento $\overline{MM}'$ de anchura *h* paralelo a Ox, se transforma en un tiempo dt en otro elemento $\overline{M_1 M_1'}$ de anchura $h\ (l + \dfrac{\partial u}{\partial x}\ dt)$

En la misma forma, $2\, g_1$, $2\, g_2$, $2\, g_3$, son velocidades de deformación angular.

Así, dos elementos $\overline{MM}'$ y $\overline{MN}'$ inicialmente paralelos a los ejes Ox y Oy, formando, por lo tanto, entre ellos un ángulo de 90°, en el tiempo dt formarán otro ángulo de $(90^o - \varepsilon)$ tal que:

$$\varepsilon = (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})\, dt$$

Durante la transformación $\vec{D}$ se conserva el paralelismo entre las rectas, y un pequeño paralelepípedo rectángulo se transformará en otro paralelepípedo de ángulos diferentes. Estos tres movimientos elementales se esquematizan en la Fig IV.9. Si se introduce una función de deformación ϕ, de la forma:

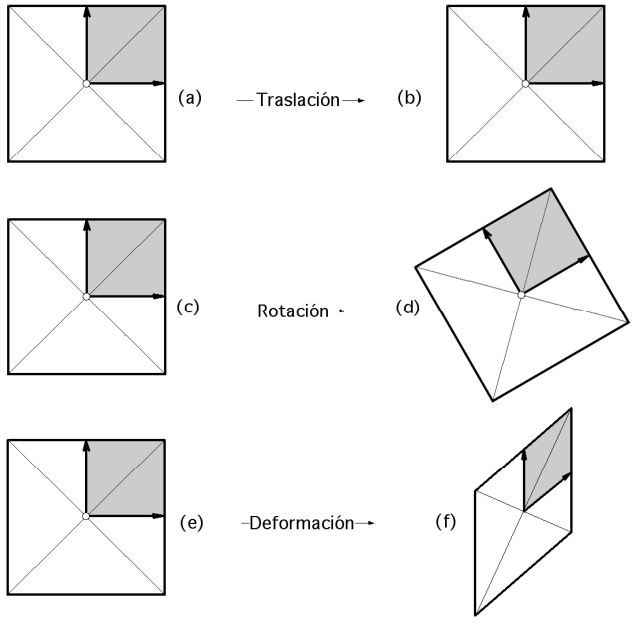


Fig IV.9.- Movimientos elementales

$$\phi(h, k, l) = \frac{1}{2}\left(h^2 \frac{\partial u}{\partial x} + l^2 \frac{\partial v}{\partial y} + k^2 \frac{\partial w}{\partial z}\right) + k\, l\, g_1 + l\, h\, g_2 + h\, k\, g_3$$

se puede comprobar que las componentes, d_1, d_2 y d_3 de la velocidad de deformación, son las derivadas parciales de ϕ, es decir:

$$d_1 = \frac{\partial \phi}{\partial h} \quad ; \quad d_2 = \frac{\partial \phi}{\partial k} \quad ; \quad d_3 = \frac{\partial \phi}{\partial l} \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = grad\ \phi$$

La descomposición que se acaba de exponer, debida a Helmholtz, es aquella para la cual la velocidad de deformación deriva de un potencial, - ϕ.

IV.6.- POTENCIAL DE VELOCIDADES PARA FUENTES Y SUMIDEROS EN FLUJO BIDIMENSIONAL

En los campos fluidodinámicos pueden existir singularidades de distintos géneros; la más sencilla es la que se presenta cuando se introduce otro fluido en el campo o se extrae del mismo. Esta singularidad toma el nombre de manantial en el primer caso o de sumidero en el segundo.

En realidad se trata de una abstracción matemática que podría compararse, toscamente, con una toma o una derivación de una conducción por la que discurriese el fluido. Las singularidades modifican el campo de velocidades de la corriente fluida no perturbada.

Si se suman algebraicamente tanto el potencial de la corriente no perturbada como los potenciales de las singularidades, se define el potencial en un punto cualquiera del campo fluidodinámico total. Se demuestra que la combinación de los potenciales de la corriente no perturbada y de las diversas singularidades posibles da lugar a corrientes con características iguales a las que se tendrían si se sumergiesen en el fluido cuerpos de forma determinada.

En efecto, si suponemos una fuente colocada en el origen de coordenadas, y un punto A cualquiera de coordenadas (x, y), las líneas de corriente y en este tipo de flujo, Fig IV.10, son rectas radiales.

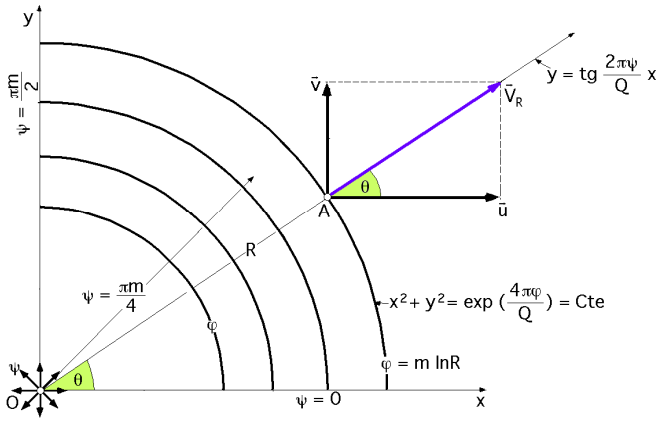


Fig IV.10.- Potencial de velocidades para una fuente en flujo bidimensional

La velocidad resultante en el punto A debida al manantial es $\vec{V}_R$, radial.

Las componentes (u,v) de la velocidad resultante son: $\begin{cases} u = V_R \ cos\ \theta \\ v = V_R \ sen\ \theta \end{cases}$

Las coordenadas (x,y) del punto A son: $\begin{cases} x = R \ cos\,\theta \\ y = R \ sen\,\theta \end{cases}$

Se define el flujo Q por unidad de tiempo, (caudal), de la forma:

$$Q = 2\ \pi\ R\ V_R \quad \Rightarrow \quad V_R = \frac{Q}{2\ \pi\ R}$$

en la que, la intensidad del manantial se define, para dos y tres dimensiones, en la forma:

$$m_{(2\ dim)} = \frac{Q}{2\ \pi} \ ; \ \ m_{(3\ dim)} = \frac{Q}{2\ \pi\ b}$$

siendo b la longitud del manantial, perpendicular al plano del dibujo.

A su vez, el potencial de velocidades φ para la fuente se obtiene a partir de:

$$u = \frac{Q}{2\ \pi\ R}\ cos\ \theta = \frac{Q}{2\ \pi}\ \frac{x}{R^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$v = \frac{Q}{2\ \pi\ R}\ sen\ \theta = \frac{Q}{2\ \pi}\ \frac{y}{R^2} = \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\varphi = \frac{Q}{2\ \pi} \int \frac{x\ dx}{x^2 + y^2} = \frac{Q}{4\ \pi}\ ln\ (x^2 + y^2\ ) = \frac{Q}{4\ \pi}\ ln\ R^2 = \frac{Q}{2\ \pi}\ ln\ R$$

Para las líneas de corriente se cumple: $\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = \dfrac{Q}{2\ \pi}\ \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = - \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = \dfrac{Q}{2\ \pi}\ \dfrac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$

y la función corriente toma la forma:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{Q}{2\ \pi}\ \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \psi = \frac{Q}{2\ \pi} \int \frac{x\ dy}{x^2 + y^2} = \frac{Q}{2\ \pi}\ arc\ tg\ \frac{y}{x} = \frac{Q}{2\ \pi}\ \theta$$

IV.7.- COMBINACIÓN DE UN FLUJO RECTILÍNEO Y UN MANANTIAL

El potencial de velocidades para un flujo rectilíneo, como el indicado en la Fig IV.11, viene dado por $\varphi_R = u\ x$, y la función corriente por $\psi_R = u\ y$

El potencial de velocidades es: $\varphi = u_0\ x + \dfrac{Q}{4\ \pi}\ ln\ (x^2 + y^2\ )$

El potencial de la función corriente es: $\psi = u_0\ y + \dfrac{Q}{2\ \pi}\ arc\ tg\ \dfrac{y}{x}$

Las componentes de la velocidad son: $\begin{cases} u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = u_0 + \dfrac{Q\ x}{2\ \pi\ (x^2 + y^2\ )} \\ v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{Q\ y}{2\ \pi\ (x^2 + y^2\ )} \end{cases}$

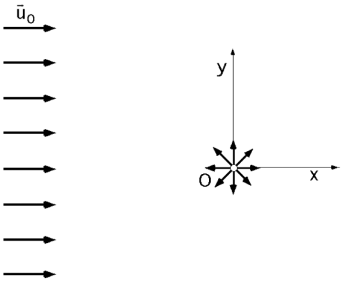


Fig IV.11.- Flujo rectilíneo y fuente

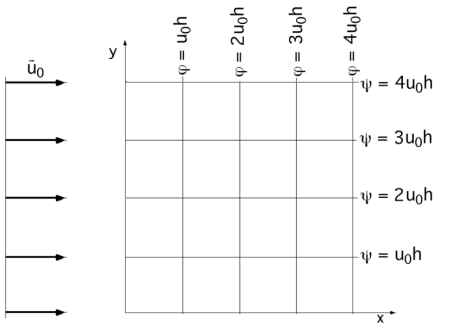


Fig IV.12.- Líneas equipotenciales y de movimiento

Las líneas de corriente $\psi = Cte$, son de la forma: $u_0\ y + \dfrac{Q}{2\ \pi}\ arc\ tg\ \dfrac{y}{x} = Cte$

y se obtienen dando a la constante los valores: 0, $\pm\dfrac{\pi}{4}$, $\pm\dfrac{\pi}{2}$, ...

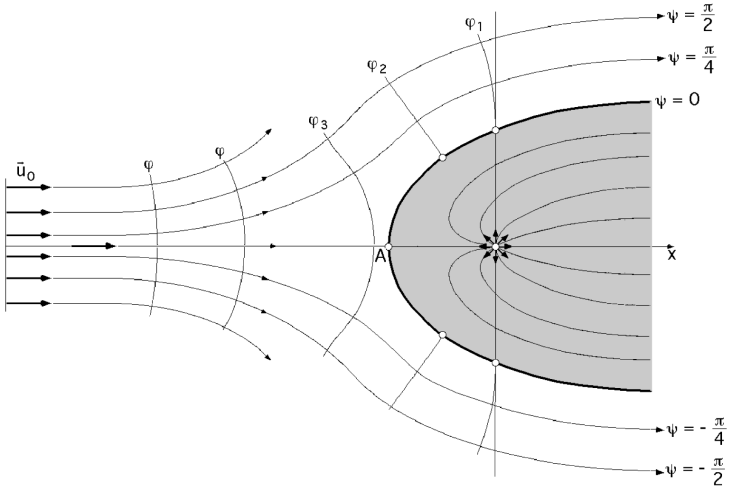


Fig IV.13.- Semicuerpo de Rankine

Se puede escoger como cuerpo sólido el dado por, ψ = 0, semicuerpo de Rankine, que es el indicado en la Fig IV.13, de la forma:

$$\psi = 0 \quad ; \quad \frac{y}{x} = tg\left(-\frac{2\ \pi\ u_0\ y}{Q}\right)$$

También se podría haber tomado como cuerpo sólido cualquiera de los $\psi = Cte$ y ser las líneas de corriente los restantes. Un cuerpo semiinfinito separa a la corriente uniforme de la fuente; la parte superior y la parte inferior de dicho semicuerpo, coinciden en un punto de remanso, $V = 0$, y en él se tiene:

$$u = u_0 + \frac{Q\ x}{2\ \pi\ (x^2 + y^2)} = \left| \begin{array}{c} u = 0 \ ; \ x = -a \\ \dfrac{Q}{2\ \pi} = m \ ; \ y = 0 \end{array} \right| = u_0 - \frac{m}{a} = 0$$

$$x = -a = -\frac{m}{u_0} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m}{u_0} = \frac{Q}{2\ \pi\ u_0}$$

Las componentes de la velocidad se pueden poner en la forma: $\begin{cases} u = u_0 + \dfrac{m}{R}\cos\theta \\ v = \dfrac{m}{R}\ sen\ \theta \end{cases}$

Para $u = v = 0$, se obtiene el punto de remanso A: $\theta = 0^o\ ;\ R = -\dfrac{m}{u_0}$

La velocidad $\vec{V}$ en cualquier punto viene dada por:

$$V^2 = u^2 + v^2 = u_0^2 + \frac{2\,m\,u_0}{R}\cos\theta + \frac{m^2}{R^2}\cos^2\theta + \frac{m^2}{R^2}\,sen^2\theta = u_0^2 + \frac{2\,m\,u_0}{R}\cos\theta + \frac{m^2}{R^2} =$$

$$= u_0^2 + \frac{2\,a\,u_0^2}{R}\cos\theta + \frac{a^2 u_0^2}{R^2} = u_0^2\,(1 + \frac{2\,a}{R}\cos\theta + \frac{a^2}{R^2})$$

Un flujo rectilíneo y una fuente simulan muy bien la parte frontal de un cuerpo cilíndrico inmerso en una corriente fluida.

IV.8.- OVALO DE RANKINE

Cuando una fuente y un sumidero de igual intensidad se colocan equidistantes del origen de coordenadas, inmersos en una corriente uniforme $(u_0\,x)$ y todo el fluido de la fuente es absorbido por el sumidero, aparece una línea de corriente divisoria, definida entre el fluido de la corriente uniforme y el fluido transferido de la fuente al sumidero, línea que puede considerarse como la intersección con el plano (x,y) de la superficie de un cilindro de forma ovoidal, conocido como ovalo de Rankine. La superposición de estos flujos da lugar a un flujo externo alrededor de un cilindro ovoidal; combinando muchas fuentes y sumideros se obtiene el flujo aproximado alrededor de un cilindro de forma arbitraria, simétrico respecto al eje Ox. El ovalo de Rankine tiene por ecuaciones, para las líneas equipotenciales y de corriente, de acuerdo con la Fig IV.14, las siguientes:

$$\varphi = u_0\,x - \frac{Q}{2\,\pi}\,ln\,r_1 + \frac{Q}{2\,\pi}\,ln\,r_2 = u_0\,x + \frac{Q}{4\,\pi}\,ln\,\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

$$\psi = u_0\,y - \frac{Q}{2\,\pi}\,\theta_1 + \frac{Q}{2\,\pi}\,\theta_2 = u_0\,y - \frac{Q}{2\,\pi}\,(arc\,tg\,\frac{y}{x-a} - arc\,tg\,\frac{y}{x+a}) =$$

$$= u_0\,r\,sen\,\theta - m\,(\theta_1 - \theta_2) = u_0\,y - m\,arc\,tg\,\frac{2\,a\,y}{x^2 + y^2 - a^2}$$

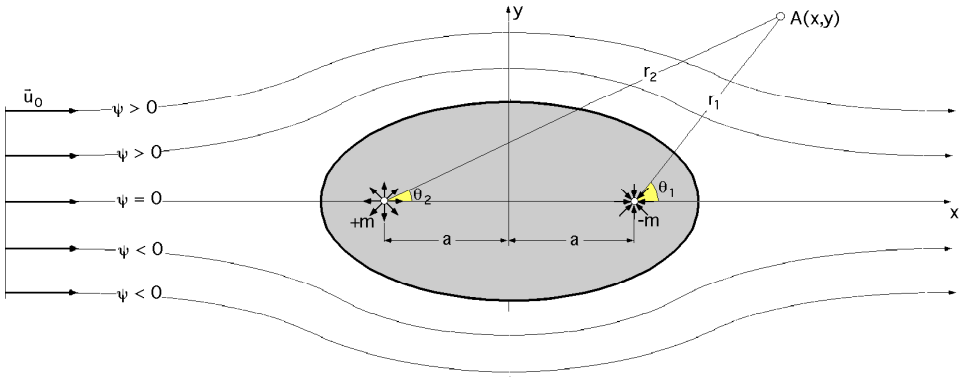


Fig IV.14.- Ovalo de Rankine

Los semiejes del óvalo, L y h, dependen de la intensidad relativa de la fuente y de la corriente uniforme, es decir, de la relación $\frac{m}{u_0 a}$; la línea oval es, $\psi = 0$.

Cuando se aumenta la relación $\frac{m}{u_0\ a}$, desde 0 a valores elevados, la forma del óvalo aumenta de tamaño y espesor, desde una placa plana de longitud *(2 a)*, hasta un cilindro casi circular.

En el límite, cuando $\frac{m}{u_0\ a} \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} L/h \rightarrow 1 \\ u_{máx}/u_0 \rightarrow 2 \end{cases}$, correspondiente al flujo en torno a un cilindro circular.

IV.9.- DOBLETE

Vamos a suponer una fuente situada en el punto A, Fig IV.15, que consideramos como origen de coordenadas, y un sumidero en B, de igual intensidad, lo cual supone el mismo valor de Q, separados una distancia *ds* infinitesimal.

La fuente y el sumidero pueden estar tan cerca como se quiera, siempre que se mantenga constante el producto de su intensidad por la distancia que los separa, *m ds = 0*

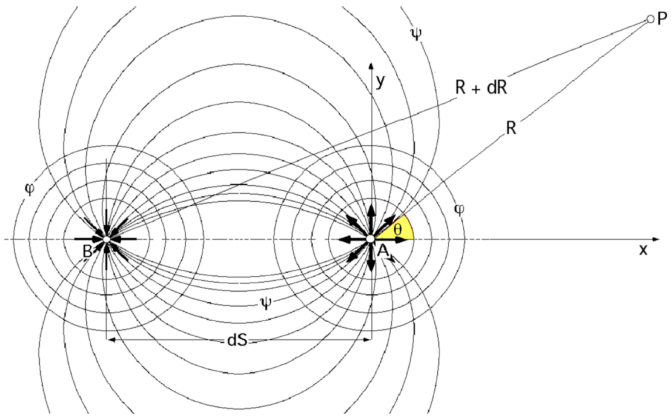


Fig IV.15.- Doblete (visto desde muy cerca)

La función potencial φ_D en cualquier punto P es la suma de las funciones potenciales de la fuente y del sumidero; en consecuencia se puede poner:

$$\varphi_D = \frac{Q}{2\ \pi}\ ln\ R - \frac{Q}{2\ \pi}\ ln\ (R + dR) = -\ \frac{Q}{2\ \pi}\ ln\ \frac{R + dR}{R} = -\ \frac{Q}{2\ \pi}\ ln\ (1 + \frac{dR}{R})$$

Desarrollándola en serie de potencias se obtiene:

$$\varphi_D = -\ \frac{Q}{2\ \pi}\ (\frac{dR}{R} - \frac{1}{2}\ (\frac{dR}{R})^2 + \ ...) = -\ \frac{Q\ dR}{2\ \pi\ R} = -\ \frac{Q\ dS\ cos\ \theta}{2\ \pi\ R}$$

en la que: $F = \frac{Q\ dS}{2\ \pi} = Cte$, y la intensidad de la fuente o del sumidero $\frac{Q}{2\ \pi} = m$

La función potencial para el doblete es:

$$\varphi_D = - \frac{F \cos\theta}{R} = - \frac{F\,x}{R^2} = - \frac{F\,x}{x^2 + y^2}$$

La función de corriente ψ_D para el doblete es:

$$u = \frac{\partial \varphi_D}{\partial x} = \frac{\partial \psi_D}{\partial y} = - \frac{F\,(x^2 + y^2\,) - 2\,F\,x^2}{(x^2 + y^2\,)^2} = - \frac{F\,(x^2 + y^2\,)}{(x^2 + y^2\,)^2}$$

$$v = \frac{\partial \varphi_D}{\partial y} = - \frac{\partial \psi_D}{\partial x} = - \frac{2\,F\,x\,y}{(x^2 + y^2\,)^2}$$

$$\psi_D = - \int \frac{2\,F\,x\,y}{(x^2 + y^2\,)^2}\,dx = \frac{F\,y}{x^2 + y^2}$$

que dice que, las *líneas de corriente son círculos* con centro situado sobre el eje perpendicular al x, por el punto medio de la distancia entre el manantial y el sumidero.

Las *líneas equipotenciales* son, como hemos visto, círculos.

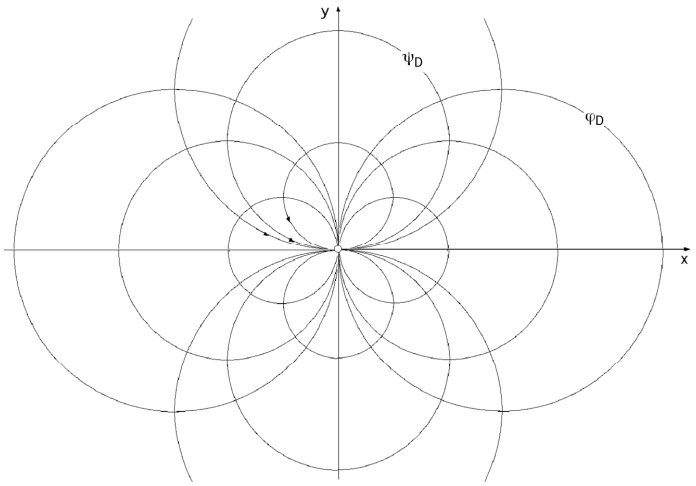


Fig IV.16.- Líneas equipotenciales y de corriente, para un doblete en dos dimensiones (visto desde muy lejos)

Un doblete visto desde muy lejos, Fig IV.16, supone que las líneas de corriente son círculos tangentes al eje x en el origen, mientras que visto desde muy cerca se corresponde con la representación anterior.

Las *líneas equipotenciales* se pueden poner en la forma:

$$x^2 + y^2 + \frac{F}{\varphi_D}\,x = 0$$

cuyo centro, de coordenadas (a,b), viene definido por $\begin{cases} a = - \dfrac{F}{2\,\varphi_D} \\ b = 0 \end{cases}$

Las *líneas de corriente* se pueden poner en la forma: $x^2 + y^2 - \dfrac{F}{\varphi_D}\,y = 0$

cuyo centro, de coordenadas (a,b), viene definido por $\begin{cases} a = 0 \\ b = \dfrac{F}{2\,\varphi_D} \end{cases}$

IV.10.- COMBINACIÓN DE UN FLUJO RECTILÍNEO Y UN DOBLETE

Supongamos un doblete en el origen O al cual se superpone un flujo uniforme rectilíneo, con velocidad $-\vec{u}_0$ a lo largo del eje Ox, Fig IV.17.

El potencial de velocidades para el flujo rectilíneo es, como sabemos, de la forma $(-u_0\,x)$

El potencial de velocidades total para el flujo combinado es: $\varphi = -u_0\,x - \dfrac{F\,x}{x^2+y^2}$

La función de corriente total para el flujo combinado es: $\psi = -u_0\,y + \dfrac{F\,y}{x^2+y^2}$

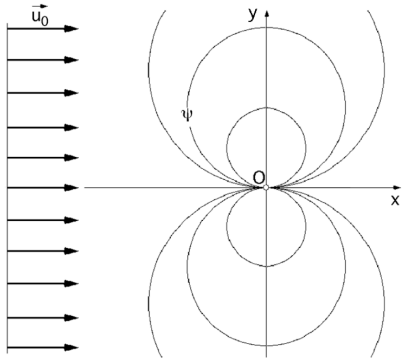


Fig IV.17
Combinación de flujo rectilíneo y doblete

Las líneas de $\psi = Cte$ son las líneas de corriente; para el caso particular de $\psi = 0$ se obtiene el llamado cuerpo de Rankine, Fig IV.18, de ecuación:

$$\frac{F\,y}{x^2+y^2} = u_0\,y$$

y soluciones $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 = \dfrac{F}{u_0} = a^2 \text{ , circunferencia de radio } a = \sqrt{\dfrac{F}{u_0}} \end{cases}$

En consecuencia, la combinación de un flujo rectilíneo y un doblete proporciona el flujo en torno a un cilindro circular de radio a, lo que será sólo posible si, como hemos indicado anteriormente, el caudal suministrado por la fuente es igual al recogido por el sumidero.

Como $F = a^2 u_0$, el potencial de velocidad total para el flujo combinado y la función de corriente total para el mismo, se pueden poner en la forma:

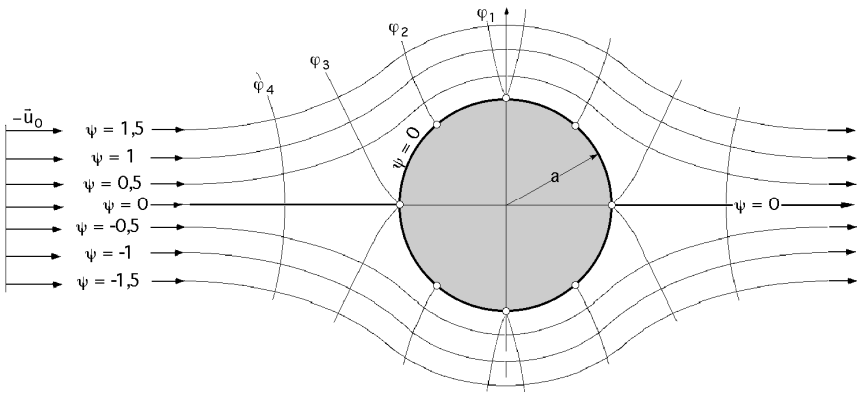


Fig IV.18.- Cuerpo de Rankine; líneas de corriente y equipotenciales

$$\varphi = - u_0\ x - \frac{x\ u_0\ a^2}{x^2 + y^2} = - u_0\ x\ (1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2})\ ; \quad \psi = - u_0\ y + \frac{y\ u_0\ a^2}{x^2 + y^2} = u_0\ y\ (- 1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2})$$

Distribución de velocidades en torno a un cilindro circular.- Supongamos un cilindro circular sometido a una corriente fluida uniforme, Fig IV.19; puede ser el caso de una chimenea cilíndrica sometida a la acción del viento, o el de un tubo inmerso en una corriente fluida, etc.

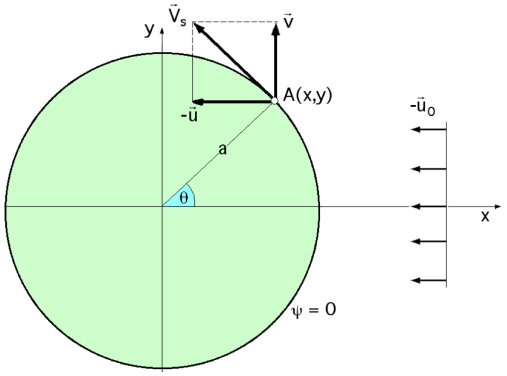


Fig IV.19.- Distribución de velocidades en un cilindro circular

Las coordenadas de un punto cualquiera vienen dadas por: $\begin{cases} x = a\ cos\ \theta \\ y = a\ sen\ \theta \end{cases}$

La velocidad en dicho punto es: $V_S = \sqrt{u_S^2 + v_S^2}$

A su vez, como: $u_S = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v_S = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, se obtiene:

$$u_S = - u_0 - \frac{u_0\ a^2\ (y^2 - x^2\ )}{(x^2 + y^2\ )^2} = - u_0 - \frac{u_0\ a^2\ (a^2\ sen^2\theta - a^2\ \cos^2\theta\ )}{(a^2\ sen^2\theta + a^2\ \cos^2\theta\ )^2} = - 2\ u_0\ sen^2\theta$$

$$v_S = \frac{2\ a^2\ x\ u_0\ y}{(x^2 + y^2\ )^2} = \frac{2\ a^2\ u_0\ a^2\ \cos\ \theta\ sen\ \theta\ )}{a^4\ (sen^2\theta + \cos^2\theta\ )^2} = 2\ u_0\ sen\ \theta\ \cos\ \theta$$

$$V_S = \sqrt{4\ u_0^2\ sen^4\theta + 4\ u_0^2\ sen^2\theta\ \cos^2\theta} = 2\ u_0 sen\ \theta$$

que es la distribución de velocidades en torno a un cilindro circular, función del ángulo θ que define sobre la circunferencia de radio a, la posición del punto genérico A(x,y).

IV.11.- VÓRTICE

Si se analiza el caso en que se tome la función de corriente de un manantial como función potencial, se obtendrá la formulación correspondiente a un vórtice bidimensional, Fig IV.20, que satisface la ecuación de Laplace $\Delta\varphi = 0$ y cuyas líneas equipotenciales son rectas radiales, mientras que sus líneas de corriente son círculos concéntricos, de centro el origen de coordenadas.

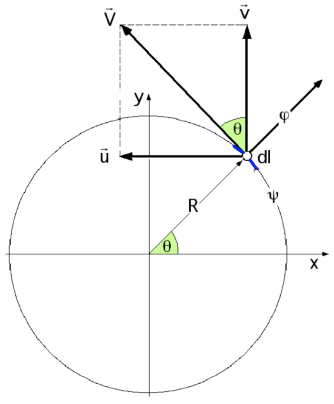


Fig IV.20.- Vórtice
líneas de corriente y equipotenciales

Las componentes de la velocidad total $\vec{V}$ son u y v, y para su cálculo se define el concepto de circulación Γ, como la intensidad del vórtice, que es constante, de la forma:

$$\Gamma = \int \vec{V}\ \overline{dl} = \int u\ dx + v\ dy = \int V R\ d\theta = 2\ \pi\ R\ V \ \Rightarrow \ V = \frac{\Gamma}{2\ \pi\ R}$$

Si φ es el potencial de velocidades y ψ la función corriente, se tiene:

$$u = - V\ sen\,\theta = - \frac{\Gamma}{2\ \pi\ R}\ sen\,\theta = - \frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = V\ \cos\theta = - \frac{\Gamma}{2\ \pi\ R}\ \cos\theta = \frac{\Gamma}{2\ \pi}\ \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Integrando estas ecuaciones se tiene: $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\Gamma}{2\ \pi}\ arc\ tg\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{\Gamma}{2\ \pi}\ q \\ \psi = - \dfrac{\Gamma}{4\ \pi}\ ln\ R^2 = - \dfrac{\Gamma}{4\ \pi}\ ln\ (x^2 + y^2\ ) = - \dfrac{\Gamma}{2\ \pi}\ ln\ R \end{cases}$

que son, respectivamente, las ecuaciones de las líneas equipotenciales (rectas radiales) y de corriente; de ellas se deduce:

$$x^2 + y^2 = e^{- \frac{4\ \pi\ \psi}{\Gamma}}$$

que son circunferencias concéntricas.

IV.12.- COMBINACIÓN DE UNA FUENTE Y UN VÓRTICE

En algunos estudios de maquinaria para fluidos, tales como el flujo a través de hélices o rotores de bombas centrífugas, se considera la combinación de una fuente y un vórtice; si se sitúa la fuente en el origen de coordenadas y se la añade un vórtice, en un punto A(x,y) cualquiera del plano, las de la velocidad $\vec{V}$ resultante de la combinación son: $\begin{cases} \vec{V}_F\ \ debida\ al\ manantial \\ \vec{V}_V\ \ debida\ al\ vórtice \end{cases}$

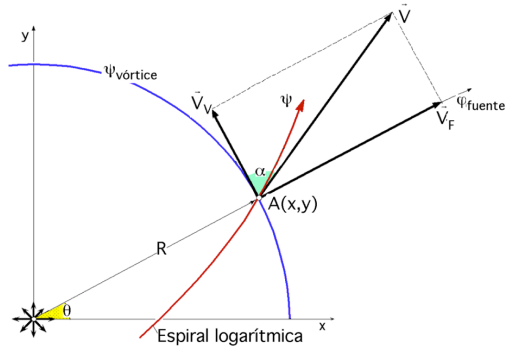


Fig IV.21.- Combinación de una fuente y un vórtice

Si se supone que el caudal Q representa la fuerza de la fuente, y la circulación Γ representa la fuerza del vórtice, se puede poner, Fig IV.21:

$$V_F = \frac{Q}{2\ \pi\ R}\ \ ;\ \ V_V = \frac{\Gamma}{2\ \pi\ R}$$

El ángulo α formado por $\vec{V}_F$ y $\vec{V}_V$ viene dado por:

$$tg\ \alpha = \frac{V_F}{V_V}\ \ \Rightarrow\ \ \alpha = arc\ tg\ \frac{V_F}{V_V} = arc\ tg\ \frac{Q}{\Gamma}$$

por lo que para un valor constante de Γ y de Q, el ángulo α será constante para cualquier valor de R, que es la distancia entre el origen de coordenadas y el punto A(x,y). La función de corriente ψ para la combinación de un vórtice y una fuente es:

$$\psi = \frac{Q}{2\ \pi}\ arc\ tg\ \frac{y}{x} - \frac{\Gamma}{4\ \pi}\ ln\ (x^2 + y^2\ ) = \frac{Q}{2\ \pi}\ \theta - \frac{\Gamma}{2\ \pi}\ ln\ R$$

$$ln\ R = \frac{Q\ \theta - k}{\Gamma}\ \ \Rightarrow\ \ R = e^{\frac{Q\ \theta - k}{\Gamma}}$$

Para, $y = k = 0$, $R = exp\,(\,\frac{Q\,\theta}{\Gamma}\,)$, que es la ecuación de una espiral logarítmica.

El valor de la circulación en torno al centro de un vórtice libre o irrotacional, es constante, e independiente del contorno que se elija, circular o no. En general, la circulación Γ es igual a la suma algebraica de las intensidades de todos los torbellinos que haya en la región interior a la curva cerrada. A continuación veremos que una región de circulación finita en una corriente está sometida a una fuerza de sustentación proporcional a u_0 y Γ.

IV.13.- FLUJO EN TORNO A UN CILINDRO CON VÓRTICE LIBRE

La palabra elevación, o impulso ascendente, significa una fuerza en ángulo recto con la línea de flujo no perturbado. El flujo en torno a un cilindro, combinación de flujo rectilíneo y doblete, es simétrico respecto a la línea de corriente no perturbada, eje Ox, y por lo tanto no hay impulso ascendente sobre el cilindro con este tipo de flujo. Solamente se podrá desarrollar un impulso ascendente dinámico si, el conjunto de las líneas de corriente no es simétrico con respecto a la línea de corriente no perturbada; el flujo no simétrico se puede conseguir sumando un vórtice libre al doblete y al flujo rectilíneo.

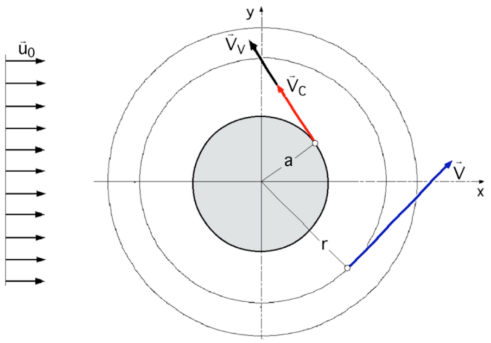


Fig IV.22.- Flujo en torno a un cilindro con vórtice libre

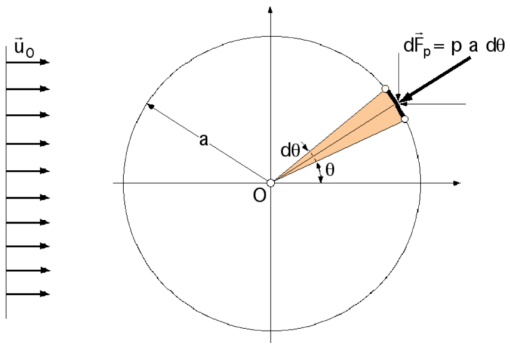


Fig IV.23.- Fuerza ascensional

Sea $\vec{V}_V$ la velocidad en la superficie del cilindro de radio a, debida exclusivamente a un vórtice libre en sentido contrario a las agujas del reloj; la circulación en torno al cilindro es, $\Gamma = 2\,\pi\,a\,V_V$

La velocidad resultante es: $V = V_C + V_V = 2\,u_0\,sen\,\theta + \frac{\Gamma}{2\,\pi\,a}$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre un punto de la corriente no perturbada, y un punto del cilindro, se tiene:

$$p_0 + \frac{1}{2}\,\rho\,u_0^2 = p + \rho\,V^2$$

y el valor de la presión:

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\,\rho\,u_0^2 - \frac{\rho}{2}\,(\,2\,u_0\,sen\,\theta + \frac{\Gamma}{2\,\pi\,a}\,)^2$$

Para calcular la fuerza neta de impulso ascendente, en ángulo recto con el movimiento no perturbado, se hace la integración de las fuerzas de presión sobre el cilindro en la dirección Oy, Fig IV.23.

Su componente vertical es: $dF_{p_{vertical}} = p\ a\ d\theta\ sen\,\theta$

El impulso ascendente, de signo contrario, es: $dF_{ascendente} = -\,p\ a\ d\theta\ sen\ \theta$

y el impulso ascendente total sobre el cilindro F_{asc}:

$$F_{asc} = -\int_0^{2\pi} p\ a\ sen\,\theta\ \ d\theta = -\int_0^{2\pi} \{p_0 + \frac{1}{2}\ \rho\ u_0^2\ -\ \frac{\rho}{2}\ (2\ u_0\ sen\,\theta + \frac{\Gamma}{2\ \pi\ a})^2\ \}\ a\ sen\,\theta\ \ d\theta =$$

$$= -\ a\ (p_0 + \frac{\rho\ u_0^2}{2})\ \int_0^{2\pi} sen\,\theta\ \ d\theta\ +\ \frac{a\ \rho}{2}\ \int_0^{2\pi} (4\ u_0^2\ \ sen^3\theta + \frac{2\ u_0\ \ \Gamma\ sen^2\theta}{a\ \pi} + \frac{\Gamma^2\ sen\,\theta}{4\ \pi^2 a^2})\ d\theta$$

y como: $\int_0^{2\pi} sen\,\theta\,d\theta = \ 0\ \ ;\ \ \int_0^{2\pi} sen^3\theta\,d\theta = \ 0$, resulta:

$$F_{asc} = \frac{a\ \rho}{2}\ [\,4\ u_0^2\ \{-\ \frac{\cos\theta}{2}\ (sen^2\theta\ +\ 2)\} + \frac{2\ u_0\ \ \Gamma}{a\ \pi}\ (\frac{\theta}{2}\ -\ \frac{sen\,2\theta}{4})\ -\ \frac{\Gamma^2\cos\theta}{4\ \pi^2 a^2}\,]_0^{2\pi} = \rho\ u_0\ \ \Gamma$$

que es la fuerza de impulso ascendente por unidad de longitud del cilindro; a esta ecuación se la conoce como de Kutta-Joukowski.

IV.14.- EJEMPLOS RELATIVOS A LA RESOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE EN EL PLANO

Sea una función de la variable compleja $(x + i\,y)$ de la forma:

$f(z) = \varphi\,(x, y) + i\ \psi\,(x, y)$

A todo numero complejo $(x + i\,y)$ corresponde en el plano (x,y) un punto bien definido.

Se dice que la función f(z) es analítica, cuando la relación $\lim_{\Delta z \to 0}\ \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ es independiente de la forma conque $\Delta z \to\ 0$; ésto implica que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}\ \ ;\ \ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\ \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

pudiéndose comprobar que las funciones φ y ψ satisfacen la ecuación de Laplace.

En consecuencia, la parte real y la parte imaginaria de una función analítica cualquiera de la variable compleja $(x + i\,y)$ son dos funciones armónicas, de forma que para un flujo en el plano (x,y), la parte real se puede considerar como el potencial φ de velocidades y la parte imaginaria como la función ψ de corriente.

Las componentes u y v de la velocidad, vienen dadas, como sabemos, por las relaciones:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

resultando:

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = u - i v$$

a) Movimiento uniforme de velocidad u_0.- Consideremos la función lineal

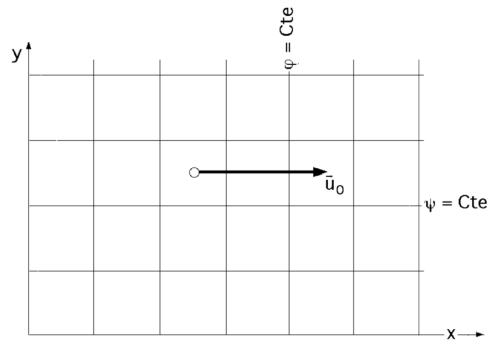


Fig IV.24.- Movimiento uniforme de velocidad u_0

$$f(z) = u_0 z = u_0 x + i u_0 y$$

Teniendo en cuenta lo anterior se deduce $\begin{cases} \varphi = u_0 x \\ \psi = u_0 y \end{cases}$ que representan una corriente uniforme en la dirección del eje x; la velocidad se puede calcular a partir de φ o de Ψ, hallando la derivada de f(z) respecto de z, en la forma:

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = u - i v$$

en la que la parte $\begin{cases} \text{- real de la derivada es igual a la componente } \vec{u} \text{ de la velocidad} \\ \text{- imaginaria es igual a } -\vec{v} \end{cases}$

Para conseguir un resultado práctico la derivada $\frac{df}{dz}$ tiene que existir, y ser única; en este caso se tiene que, $\frac{df}{dz} = u_0 = u$, que es real y, por lo tanto, como era de esperar, $v = 0$.

Las líneas $\begin{cases} \text{equipotenciales } \varphi = Cte, \text{ son paralelas al eje Oy} \\ \text{de corriente } \psi = Cte, \text{ son paralelas al eje Ox} \end{cases}$ según se indica en la Fig IV.24.

b) Flujo radial para una fuente (o un sumidero).- Algunas veces conviene utilizar la variable compleja en polares, en la forma:

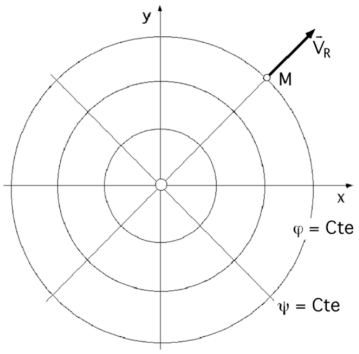


Fig IV.25.- Flujo radial para una fuente

$z = x + i y = r e^{i\theta} = r \cos\theta + i r \operatorname{sen}\theta$, siendo: $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arc\ tg \frac{y}{x} \end{cases}$

Si se considera:

$$V = f_2(x, y, z) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{cases}$$

con la intensidad de la fuente $m = \frac{q}{2\pi}$ un número real, se tiene:

correspondiéndose con un manantial o con un sumidero, según que el signo de m sea positivo o negativo, Fig IV.25.

c) Flujo en las proximidades de un punto fijo.- Este movimiento viene definido por la función compleja:

$$f(z) = \frac{a}{2} z^2 = \frac{a}{2} (x + i\,y)^2 = \frac{a}{2} (x^2 - y^2 + 2\,i\,x\,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{a}{2} (x^2 - y^2) \\ \psi = a\,x\,y \end{cases}$$

siendo las líneas de corriente hipérbolas equiláteras de ecuación $(a\,x\,y = Cte)$ y las equipotenciales también hipérbolas equiláteras ortogonales a las líneas de corriente, Fig IV.26.

Las componentes de la velocidad en un punto vienen dadas por, $\begin{cases} u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = a\,x \\ v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -\,a\,y \end{cases}$ siendo, por lo tanto, un movimiento plano alrededor de un punto de estancamiento A.

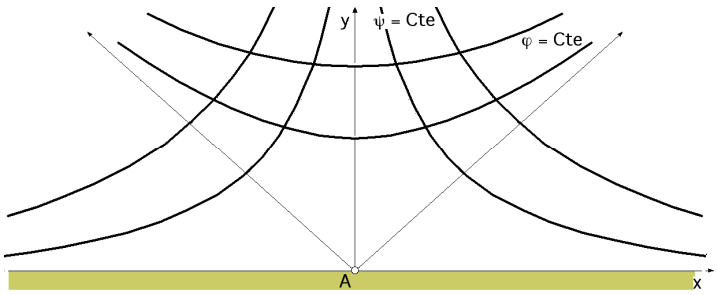


Fig IV.26.- Flujo en las proximidades de un punto fijo; líneas de corriente y equipotenciales

d) Flujo entre dos paredes que forman un ángulo α .- Si una de las paredes se hace coincidir con el eje Ox, la función analítica $f(z)$ se puede poner en la forma:

$$f(z) = \frac{a}{n} z^n = \frac{a}{n} (x + i\,y)^n \,, \quad siendo: \quad n = \frac{\pi}{\alpha}$$

En polares se tiene que:

$$z = x + i\,y = r\,(\cos\theta + i\,sen\,\theta) \quad \Rightarrow \quad z^n = r^n\,(\cos\theta\,n + i\,sen\,\theta\,n) \quad ; \quad \begin{cases} \text{Líneas equipotenciales: } \varphi = \dfrac{a}{n} r^n \cos\theta\,n = Cte \\ \text{Líneas de corriente: } \psi = \dfrac{a}{n} r^n\, sen\,\theta\,n = Cte \end{cases}$$

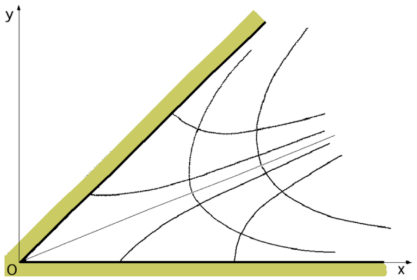


Fig IV.27.- $a = \pi/4$; $f(z) = Az^4$



Fig IV.28.- $a = \pi/2$; $f(z) = A\,z^2$

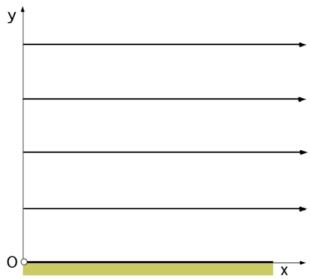


Fig IV.29.- $a = \pi$; $f(z) = A\,z$

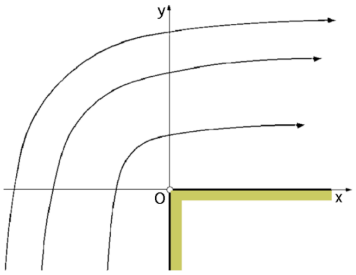


Fig IV.30.- $a = 3\pi/2$; $f(z) = A\, z^{2/3}$

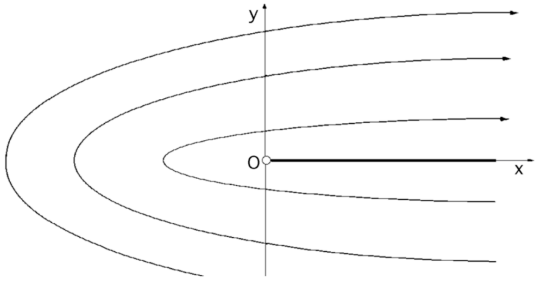


Fig IV.31.- $a = 2\pi$; $f(z) = A\, z^{1/2}$

En las Fig IV.27-28-29-30-31 se representan algunos casos para diversos valores de a.

IV.15.- LINEALIDAD DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE

La linealidad de la ecuación $\Delta\varphi = 0$ permite hacer combinaciones lineales de soluciones conocidas de la misma. En efecto, sean f_1 y f_2 dos funciones, soluciones de la ecuación de Laplace.

La función: $f_1 + f_2$, o cualquier otra combinación lineal de la forma ($\lambda\, f_1 + \mu\, f_2$) será también solución de esta ecuación; en tal superposición, los valores de las líneas de corriente, o de las equipotenciales se ajustan algebraicamente, mientras que las velocidades lo hacen geométricamente.

Por lo tanto, a partir de dos redes de flujo simples, se pueden obtener nuevas redes en las que:

- *Las nuevas líneas equipotenciales vienen dadas por:* $\lambda\ \varphi_1 + \mu\ \varphi_2$
- *Las nuevas líneas de corriente por:* $\lambda\ \psi_1 + \mu\ \psi_2$

A título de ejemplo, vamos a tratar el *flujo alrededor de un cilindro circular con circulación*:

El flujo representado por la función que se propone:

$$f(z) = u_0 \left(z + \frac{a^2}{z}\right) - i\,\frac{\Gamma}{2\pi}\, \ln\frac{z}{a}$$

tiene una importancia aerodinámica considerable; está constituido por la combinación de dos flujos conocidos alrededor de un $\begin{cases} \text{- círculo (cilindro) con velocidad uniforme } u_0 \text{ en el infinito} \\ \text{- vórtice (torbellino) puntual} \end{cases}$ y representa un flujo con circulación alrededor de un círculo de radio a.

La función potencial es: $\varphi = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\,\theta + u_0 \left(r + \dfrac{a^2}{r}\right) \cos\theta$

La función de corriente es: $\psi = -\dfrac{\Gamma}{2\pi}\, \ln\dfrac{r}{a} + u_0 \left(r - \dfrac{a^2}{r}\right) \operatorname{sen}\theta$

La línea de corriente correspondiente a $\psi = 0$, se compone de un círculo de radio $(r = a)$ y de una curva de ecuación:

$$sen\ \theta = \frac{\Gamma}{2\,\pi}\ ln\ \frac{r}{a}\ \frac{1}{u_0\ (r - \frac{a^2}{r})} = \frac{\Gamma}{2\,\pi\ u_0\ r}\ \frac{ln\ \frac{r}{a}}{1 - \frac{a^2}{r^2}} = \left| \lim_{r \to a}\ \frac{ln\frac{r}{a}}{1 - \frac{a^2}{r^2}} \to \frac{1}{2} \right| = \frac{\Gamma}{4\,\pi\ u_0\ r}$$

que junto con $(r = a)$ dan lugar a una serie de casos particulares, según que $\frac{\Gamma}{4\,\pi\ u_0\ r}$ sea mayor, igual o menor que la unidad, Fig IV.32, 33 y 34.

Si $\frac{\Gamma}{4\,\pi\ u_0 r} < 1$, *las soluciones son dos puntos reales de estancamiento A y A'*

Si $\frac{\Gamma}{4\,\pi\ u_0 r} = 1$, *los dos puntos de estancamiento se confunden en B*

Si $\frac{\Gamma}{4\,\pi\ u_0 r} > 1$, *no hay puntos de estancamiento*

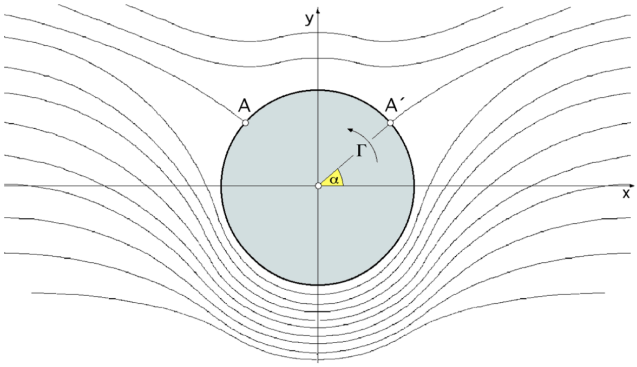


Fig IV.32.- Solución con dos puntos reales de estancamiento A y A'

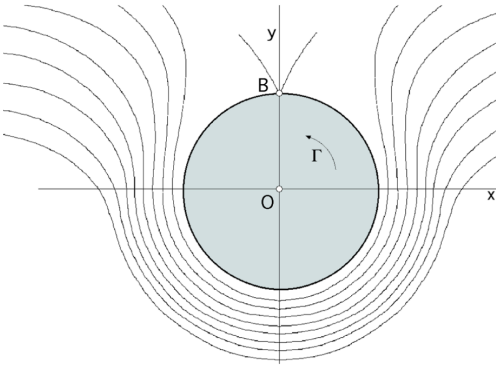


Fig IV.33.- Solución con dos puntos de estanca que se confunden en uno solo B

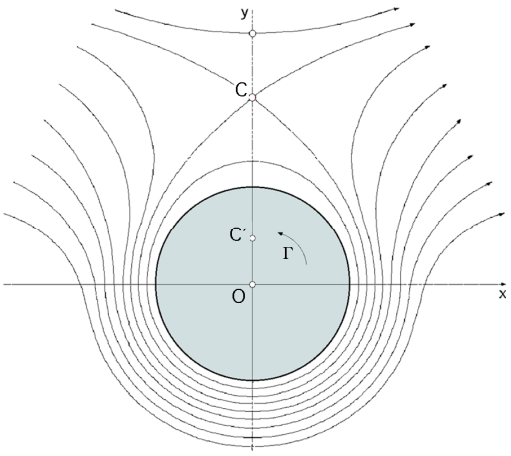


Fig IV.34.- Solución en la que no existen puntos de estancamiento. Existen dos puntos conjugados de velocidad nula

Sin embargo, para el caso $\frac{\Gamma}{4\,\pi\ u_0\ r} > 1$ se encuentran dos puntos de velocidad nula, los puntos C y C' conjugados con relación al círculo, Fig IV.34.

Sobre el círculo la velocidad es tangente; el resultado se podía preveer de antemano:

$$V = \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)_{r=a} = \frac{\Gamma}{2\,\pi\,a} - 2\,u_0\ sen\,\theta$$

IV.16.- REPRESENTACIÓN CONFORME

La relación compleja $\zeta = F(z)$, en la que $\begin{cases} \zeta = \xi + i\,\eta \\ z = x + i\,y \end{cases}$, expresa una correspondencia tal que, a cada par de valores (x, y) corresponde otro par de valores (ξ, η), Fig IV.35. En consecuencia, a todo punto M del plano (x, y) corresponderá un punto P de coordenadas (ξ, η) del plano conjugado; asimismo, a una línea descrita por M corresponderá una línea descrita por P.

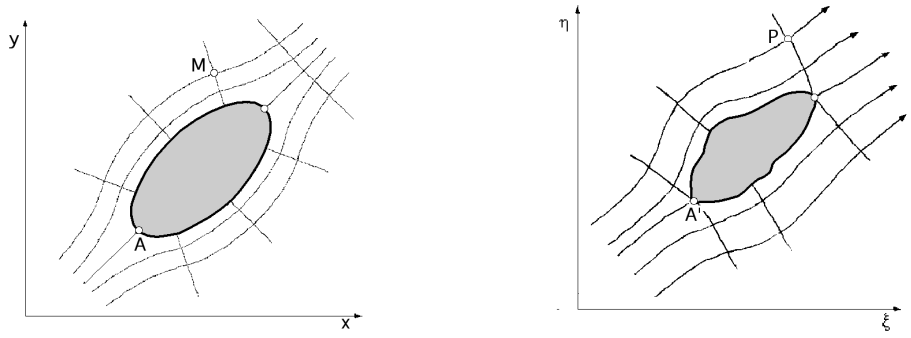


Fig IV.35.- Representación conforme

A la intersección de dos curvas corresponde la intersección de dos curvas transformadas.

Se dice que la transformación es conforme cuando conserva los ángulos, es decir, si dos curvas del plano *z* se cortan en M bajo un cierto ángulo α, en el plano ζ se corresponderá con dos curvas que se cortan en P, homólogo de M, bajo el mismo ángulo, (salvo para ciertos puntos singulares).

Admitiremos, sin demostración, los siguientes teoremas:

a) Si $\zeta = f(z)$, es una función analítica de la variable z, la transformación que permite pasar de z a ζ es conforme

b) Si se efectúa una transformación conforme de un flujo plano definido por su red de líneas equipotenciales y de corriente, se tiene que:

- *Las transformadas de las líneas equipotenciales y de corriente formarán una nueva red de líneas equipotenciales y de corriente en donde cada transformada conserva la magnitud de la línea primitiva*
- *La circulación de las velocidades a lo largo de una línea cualquiera del plano primitivo es igual a la circulación a lo largo de la transformada*

Prácticamente la resolución de un problema de flujo se reduce a buscar una transformación conforme que permita una correspondencia entre el flujo desconocido y otro más simple, o a otro ya conocido.

IV.17.- TRANSFORMACIÓN DE JOUKOWSKI

Esta transformación es de la forma: $\zeta = \xi + i\,\eta = \frac{1}{2}\,(z + \frac{b^2}{z})$

Si se aplica a las líneas de corriente que derivan del potencial complejo:

$$f(z) = u_0\ (z + \frac{a^2}{z}) - i\ \frac{\Gamma}{2\,\pi}\ ln\ \frac{z}{a}$$

se puede encontrar la forma de las líneas de corriente alrededor de obstáculos cuyo perfil sea el de ala de avión, y conocer así el reparto de velocidades alrededor de los mismos.

Los resultados teóricos así obtenidos concuerdan perfectamente con la experiencia. Se puede demostrar que esta transformación equivale a las relaciones siguientes: $\begin{cases} \xi = \frac{1}{2}\,(r + \frac{b^2}{r})\,cos\,\theta \\ \eta = \frac{1}{2}\,(r - \frac{b^2}{r})\,sen\,\theta \end{cases}$

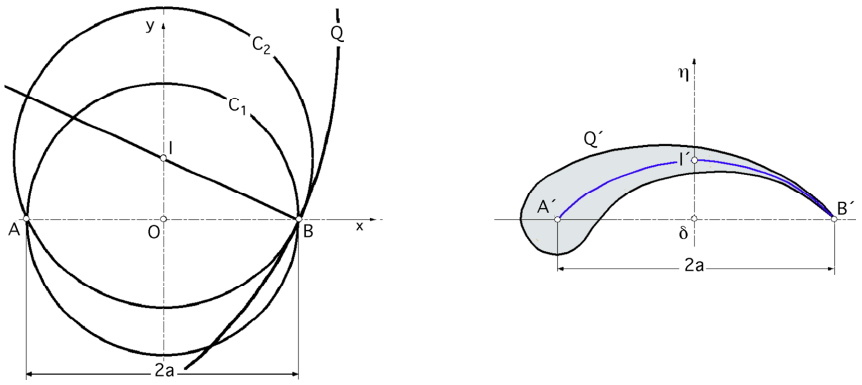


Fig IV.36.- Transformación de Joukowski

En la Fig IV.36 se tiene que:

- Los puntos A y B se transforman en los puntos A' y B'

- Al círculo C_1 de diámetro (AB) le corresponde el segmento (A'B')

- A los círculos de ecuación, $x^2 + y^2 = R^2$, de centro O, corresponden las elipses homofocales de focos A y B

- Al círculo C_2 de centro I, que pasa por los puntos A y B, corresponde el arco de círculo (A'I'B')

- Al círculo Q tangente en B al círculo C_2, corresponde el perfil Q' tangente en B' al arco (A'I'B')

Si se traza el flujo alrededor del círculo, con o sin circulación, la transformación de Joukowski permite obtener el flujo alrededor del perfil de ala de avión, con lo que se entraría en el estudio de perfiles, mas propio de la aerodinámica teórica. Si mediante un procedimiento de transformación conforme pasamos de perfiles circulares a perfiles alares, las presiones teóricas sobre cada punto del perfil se corresponderán con las de los correspondientes puntos del círculo y, por lo tanto, al integrarse las mismas se puede llegar a la sustentación de un ala infinita.

IV.18.- PARADOJA DE D'ALEMBERT

Cuando un cuerpo sólido se mueve en el interior de un fluido real, se originan unas fuerzas debidas a la viscosidad. Por el Principio de acción y reacción, el cuerpo ejerce sobre el fluido una fuerza igual y de sentido contrario a la que el fluido ejerce sobre el solido, es decir, el fenómeno de la resistencia que un solido experimenta al moverse en el seno de un fluido, es análogo al de la resistencia que un fluido experimentaría al moverse en el interior de un solido, como una tubería, por ejemplo.

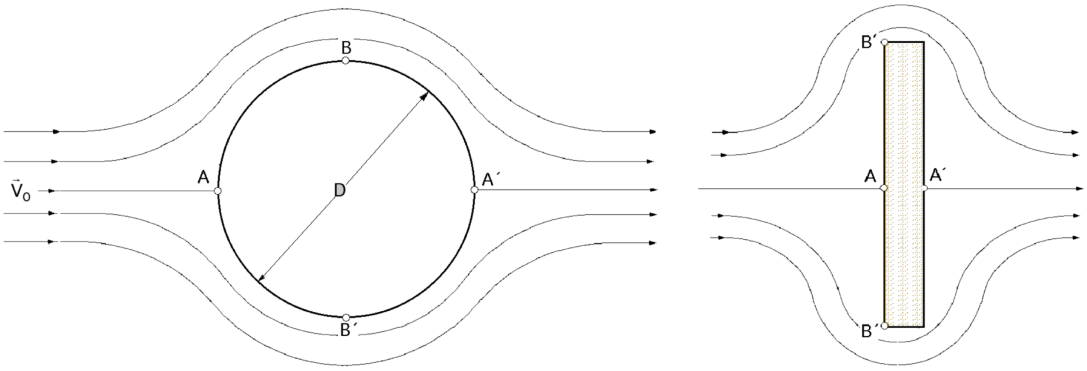


Fig IV.37.- Cilindro y placa en el seno de un fluido perfecto en movimiento

Sea un cilindro, una esfera, etc, Fig IV.37, colocados en el seno de un flujo bidimensional, carente de viscosidad; si el fluido se mueve en régimen laminar, su velocidad en los puntos A y A' será nula, (puntos de estancamiento), siendo, por lo tanto, su presión máxima; en los puntos B y B' la velocidad alcanza su valor máximo, y la presión su valor mínimo; en consecuencia, la distribución de presiones en torno al cilindro, esfera, etc., es simétrica, llegándose a la conclusión de que estos sólidos introducidos en un fluido ideal, moviéndose en régimen laminar, no están sometidos a ninguna fuerza, permaneciendo quietos, resultado que está en contradicción con la realidad, por cuanto la experiencia dice que este hecho de la distribución simétrica de presiones no se cumple, hecho afortunado atribuible a la viscosidad del fluido, por cuanto los sólidos introducidos en el seno de un fluido en movimiento presentan una resistencia al avance, tanto mayor, cuanto mayor sea la diferencia de presiones existente entre los puntos A y A'.

Si el cilindro, esfera, etc., se mueve con velocidad constante $\vec{u}_0$ en el seno del fluido ideal en reposo, será equivalente a considerar el cilindro circular fijo, y el fluido ideal moviéndose en sentido contrario con velocidad $-\vec{u}_0$.

Al considerar el fluido ideal se cumple que:

- La energía será constante en todos los puntos de una misma línea de corriente

- Es irrotacional, lo cual implica el que la energía es constante en todos los puntos, aunque no estén en la misma línea de corriente

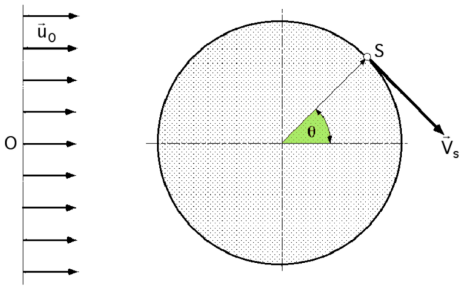


Fig IV.38
Circulación de un fluido perfecto en torno a un cilindro

La velocidad del fluido en un punto de la superficie del cilindro es, Fig IV.38,

$$V_s = 2\, u_0\, sen\theta$$

Si la gravedad no interviene porque el plano del dibujo sea horizontal, o porque el fluido sea un gas, aplicando Bernoulli entre la sección O, corriente sin perturbar, y un punto cualquiera S del cilindro, se tiene:

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2\,g} = \frac{p_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2\,g}$$

Despejando p_s y teniendo en cuenta que $(\gamma = \rho\, g)$, resulta:

$$p_s = p_0 + \frac{\rho}{2}\,(u_0^2 - V_s^2\,) = p_0 + \frac{\rho}{2}\,(u_0^2 - 4\,u_0^2\; sen^2\theta\,) = p_0 + \frac{\rho\, u_0^2}{2}\,(1 - 4\, sen^2\theta\,)$$

que se puede poner también en la forma:

$$\frac{p_s - p_0}{\frac{\rho\, u_0^2}{2}} = \frac{\Delta p}{\frac{\rho\, u_0^2}{2}} = 1 - 4\, sen^2\theta$$

Las fuerzas debidas a la presión son normales en cada punto del cilindro; dando valores a θ se obtienen los correspondiente valores de Δp que se manifiestan en la Fig IV.39, en la que el diagrama polar de presiones permite visualizar la paradoja de D'Alembert, y en donde por la simetría de las presiones, la resultante (fuerza de arrastre) según el eje horizontal es nula, es decir, *un cilindro se mueve en el seno de un fluido ideal sin experimentar resistencia alguna*. En el fenómeno, la presión puede ser mayor, igual o menor que cero, obteniéndose los siguientes resultados:

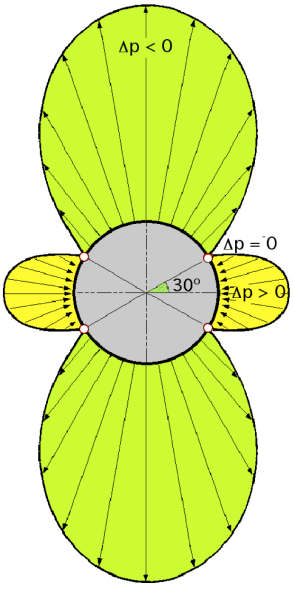


Fig IV.39
Diagrama de presiones en la circulación de un fluido perfecto en torno a un cilindro

$$Para:\begin{cases} \Delta p = 0 \;;\; 1 - 4\, sen^2\theta = 0 \;;\; \theta = \pm 30^o \\ \Delta p > 0 \;;\; 1 - 4\, sen^2\theta > 0 \;;\; \theta < \pm 30^o \\ \Delta p < 0 \;;\; 1 - 4\, sen^2\theta < 0 \;;\; \theta > \pm 30^o \end{cases}$$

Esto es lo mismo que si el potencial de una singularidad formada por un par de manantiales de signo contrario y muy cercanos, se combina con el potencial $\varphi = u_0$ de la corriente unidimensional; se tiene un flujo igual al que se tendría si en la corriente se sumergiese una esfera. En este flujo el movimiento relativo de la esfera estaría privado de resistencia (paradoja de D'Alembert).

En cambio, si el potencial del par indicado anteriormente se combina con el de un movimiento horizontal plano (bidimensional), se obtiene un flujo igual al que se tendría si se sumergiese en la corriente un cilindro circular de eje normal al plano y de altura infinitesimal como el espesor de la corriente. Incluso en este flujo, el movimiento relativo del cilindro resultaría privado de resistencia porque la distribución de las presiones en la parte anterior sería igual a la distribución de las mismas en la parte posterior. Además no se manifestarían fuerza ni tan siquiera en sentido transversal al movimiento, porque la distribución de las presiones es simétrica incluso en aquella dirección. Si además se añade a esta configuración el potencial de un torbellino se tiene un flujo igual al que se tendría si el cilindro descrito anteriormente empezase a girar sobre su propio eje, Fig IV.40, en la que se observa el comportamiento de los filetes de fluido en un cilindro que gira en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor de su eje.

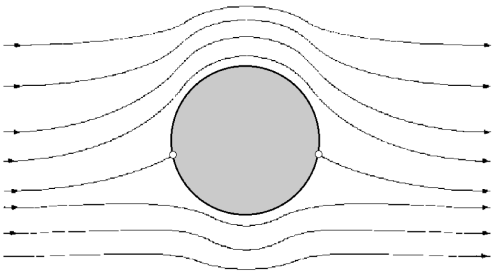


Fig IV.40

En estas condiciones la resistencia todavía es nula, pero en sentido transversal la distribución de las presiones no es ya simétrica sobre ambos lados; aparece entonces una resultante normal, perpendicular al movimiento, (sustentación), que tiene un valor dado por: $\begin{cases} \vec{F}_{asc} = \rho\ (\vec{u}_0 \wedge \vec{\Gamma}\ )\ (vectorialmente) \\ F_{asc} = \rho\ u_0\ \ \Gamma\ (escalarmente) \end{cases}$, siendo Γ la circulación (Kutta-Joukowski).

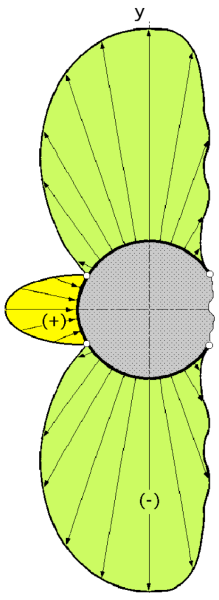


Fig IV.41
Diagrama de presiones en la circulación de un fluido perfecto en torno a un cilindro en rotación

El cilindro representa el núcleo del torbellino. Puesto que en circunstancias reales, el fluido no es perfecto, detrás del cilindro se da una distribución de presiones superficiales distinta de la que se da en la parte anterior, porque la vena fluida se separa de la superficie y aparece de esta forma una resistencia.

Conviene entonces achatar la sección circular hasta reducirla a un perfil no simétrico, de manera que en la parte posterior los hilos de fluido se separen del perfil lo más tarde posible. La asimetría de la distribución de presiones sobre dicho perfil recuerda la del cilindro que gira alrededor de su eje; por eso, el perfil continúa siendo la representación física del torbellino del mismo modo que el cilindro.

En la Fig IV.41 se presenta la distribución de presiones alrededor de un cilindro en movimiento de rotación, inmerso en un fluido en movimiento relativo respecto al baricentro del cilindro.

IV.19.- FLUJO PARA UN FLUIDO REAL EN TORNO A UN CILINDRO CIRCULAR

El flujo alrededor de un cilindro circular es un excelente ejemplo de los efectos causados por el desprendimiento de la capa límite sobre la fuerza de arrastre. Si se considera al cilindro inmerso en la corriente, desde un punto de vista macroscópico la configuración de la misma en torno al cilindro sería la indicada en la Fig IV.40, pero si nos detenemos en un punto cualquiera de la superficie del cilindro, y se pasa a la observación microscópica, se encuentra que la distribución de velocidades, como se sabe, tiene otra forma, según la cual, la capa de fluido contigua al cilindro se adhiere al mismo, por su viscosidad, por lo que su velocidad en el punto de contacto con el cilindro se reduce a cero, Fig IV.42. Esta velocidad aumenta muy rápido hasta que, pasada una cierta película de fluido de espesor δ, la velocidad que adquiere el fluido es $\vec{V}_0$ correspondiente a las líneas de corriente.

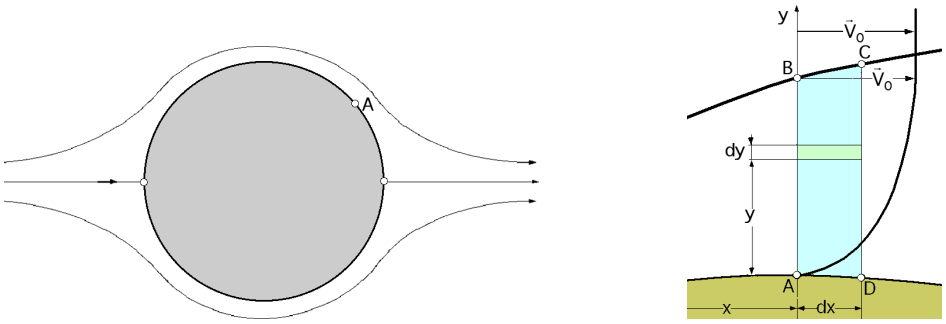


Fig IV.42.- Cilindro inmerso en una corriente y observación microscópica del flujo en sus proximidades

En la ecuación de Newton $\tau = \eta \dfrac{du}{dy}$ se tiene que, aunque η sea muy pequeña, resulta que el gradiente de velocidades $\dfrac{du}{dy}$ es muy grande, por cuanto la variación de velocidad tiene lugar dentro del espesor δ, muy pequeño, y en consecuencia, el esfuerzo cortante τ es muy grande.

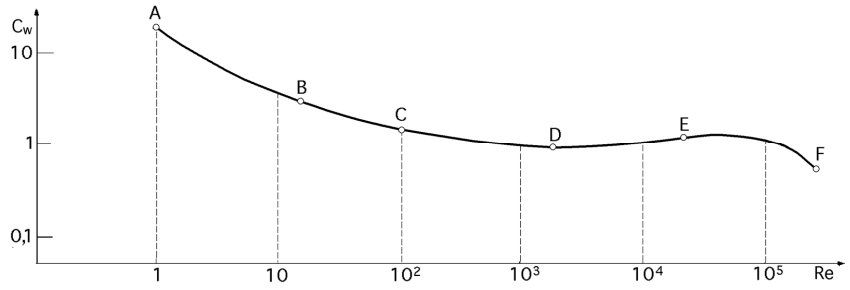


Fig IV.43.- Valores del coeficiente de arrastre en función del número de Re

En la práctica, y salvo aquellos casos en que la velocidad del fluido sea muy pequeña, no se suele dar la configuración de las lineas de corriente como las hemos visto hasta ahora sino que a partir de un cierto punto del cilindro, las líneas de corriente se separan, desprendiéndose la capa límite, y creándose aguas abajo del cilindro unos remolinos que configuran la estela, y que originan una depresión. Al estudiar, como caso particular, el flujo bidimensional de un fluido incompresible

en torno a un cilindro circular de diámetro D, el coeficiente de arrastre C_w es a su vez función del numero de Reynolds, Fig IV.43, según hemos visto por análisis dimensional, pudiéndose considerar 6 casos para distintos valores de C_w y Re, tal como se indican a continuación.

El tipo a, Fig IV.44, tiene un numero de Reynolds muy pequeño, Re < 1, por lo que las fuerzas de inercia son pequeñas en comparación con las de viscosidad, cerrándose el flujo suavemente detrás del cilindro, aguas abajo del mismo

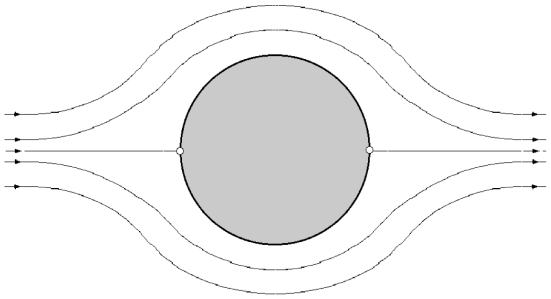


Fig IV.44
a) Flujo bidimensional en torno a un cilindro, Re< 1

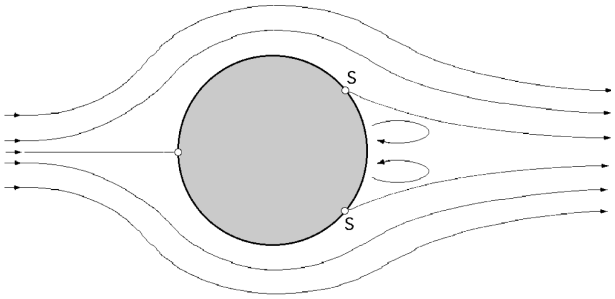


Fig IV.45
b) Flujo bidimensional en torno a un cilindro, Re = 20

Al aumentar el numero de Reynolds, el coeficiente de arrastre C_w disminuye; este caso b Fig IV.45, se presenta para Re ≈ 20. El flujo es laminar a lo largo de la superficie del cilindro aguas arriba; en el punto S se produce la separación de la capa límite laminar; aguas abajo aparece une región en la que se encuentran dos remolinos estacionarios.

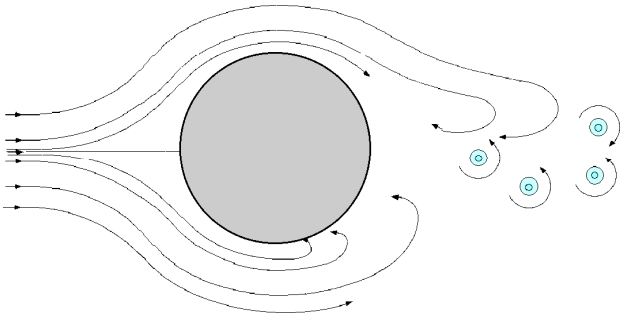


Fig IV.46
c) Flujo bidimensional en torno a un cilindro, Re > 20

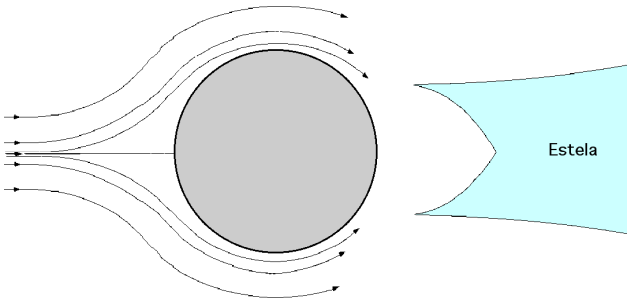


Fig IV.47
d) Flujo bidimensional en torno a un cilindro, 5.000 < Re < 15.000

Para valores del número de Reynolds, Re > 20, Fig IV.46, los remolinos se hacen inestables, comienzan a vibrar irregularmente, y posteriormente se separan alternativamente de los dos lados, periódicamente, describiendo lo que se conoce como la trayectoria del vórtice de Kàrmàn, existiendo después del cilindro una disposición estable y escalonada de vórtices. La capa límite del lado de la corriente arriba del cilindro es laminar, separándose detrás del cilindro. En la estela posterior aparecen una serie de capas libres laminares.

Para valores del número de Reynolds comprendidos entre 5.000 < Re < 15.000, Fig IV.47, el flujo se separa del cilindro para formar una estela simétrica con capas libres turbulentas caso d.

El tipo e Fig IV.48, aparece para números de Reynolds entre 50.000 < Re < 200.000, siendo constante,

para este caso, el coeficiente de arrastre C_w. El punto S es la separación de la capa límite laminar, produciéndose la transición al mismo tiempo que la separación.

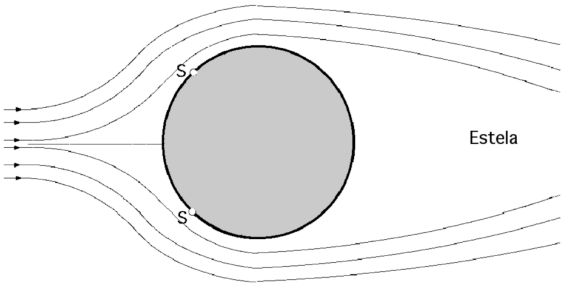


Fig IV.48.- e) Flujo bidimensional en torno a un cilindro, 50.000 < Re < 200.000

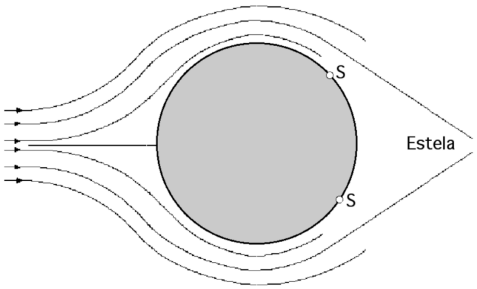


Fig IV.49.- f) Flujo bidimensional en torno a un cilindro, Re > 200.000

Para el tipo f Fig IV.49, el numero de Reynolds es, Re > 200.000, y la transición se produce en la capa límite laminar, por delante del punto de separación. En la capa límite turbulenta existirán una intensa mezcla de porciones de fluido, siendo el perfil de velocidades mas brusco, retrasándose, en consecuencia, la separación. Detrás del cilindro, la capa límite turbulenta se separara para formar una estela turbulenta. Como resumen, se puede asegurar que, para el flujo alrededor de un cilindro, y para números de Re muy pequeños, el flujo es laminar en todos sus puntos; para números grandes de Re, el flujo se puede considerar como potencial, salvo en la capa límite y en la estela.

La capa límite se forma a partir del punto de estancamiento, aguas arriba del cilindro, y suele ser laminar, para la cual, un gradiente de presión adverso, precipita la separación antes que en una capa límite turbulenta, por ser la cantidad de movimiento relativamente pequeña en la capa laminar. Se encuentra que el punto de separación para la capa límite laminar se sitúa mas arriba del cilindro que el punto de separación correspondiente al caso en que la capa límite se hace turbulenta antes de que se separe. La transferencia de la cantidad de movimiento incrementada en la capa límite turbulenta retrasa el punto de separación, deduciéndose la estela en tamaño.

IV.20.- PERFIL AERODINÁMICO

Para el caso del perfil aerodinámico inmerso en un fluido, Fig IV.50, en el extradós se produce una fuerte depresión (aspiración) y en el intradós se produce una pequeña presión que se extiende hasta el borde de ataque (borde frontal) del ala, para pequeños valores de su ángulo a de inclinación (ángulo de ataque) en relación a la dirección de la corriente no perturbada.

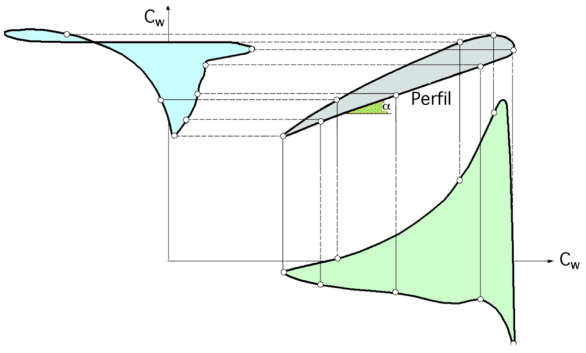


Fig IV.50.- Coeficientes aerodinámicos de un perfil de ala de avión

El valor medio de la diferencia de presiones entre el intradós y el extradós, para una super-

ficie de ala igual a: S (L_{cuerda} *x 1 metro lineal de ala)*, proporciona la fuerza de sustentación, de la forma:

$$F_{sust} = \frac{C_w \rho\, S\, u_0^2}{2}$$

en la que C_w es el coeficiente de sustentación que depende de la forma del perfil (ala) y del ángulo α.

Se puede imaginar el ala infinita sustituida por un serie de torbellinos, con el eje paralelo al borde de ataque, como tramos *ds* de fluido adherente que entran en la longitud L del ala; cuando se examina el ala de longitud L finita, estos torbellinos, que están adheridos a la superficie, no terminan donde el ala está cortada, sino que se repliegan hacia atrás a 90º (torbellinos en forma de herradura o de estribo), formando torbellinos libres. Estos torbellinos, por efecto de la inducción, desvían hacia abajo la corriente detrás del ala, con velocidad $\vec{v}$ menor que la velocidad $\vec{V}$ del fluido. Por tal motivo, el ala finita puede considerarse equivalente a un ala infinita con el mismo perfil, pero con una incidencia reducida, y puesto que para el ala infinita la sustentación es función lineal de la incidencia, el ala finita tiene una sustentación menor.

Para un ala infinita, la resultante aerodinámica es perpendicular a la velocidad, (resistencia nula), pero para un ala finita se origina una resistencia inducida R_i, que se añade a la resistencia de perfil R_p debida al rozamiento y a la falta de recuperación de presiones provocada por la separación de la corriente; la suma de estas dos resistencias es:

$$R = \frac{C_w\, \rho\, S\, V^2}{2}$$

En la práctica, la sustentación no crece indefinidamente con α sino que el coeficiente de sustentación alcanza un valor y después disminuye bruscamente para $\alpha = 12^o \div 16^o$; ésto es debido a que la vena fluida, cuando el ángulo α llega a estos valores, no puede permanecer unida a la superficie y se produce una reducción de la depresión, que es el fenómeno de mayor influencia en la sustentación del ala. Para obtener la resistencia total, es necesario añadir a la resistencia del perfil deducida anteriormente, la resistencia de rozamiento, como la que se tendría sobre una cara de una superficie plana lisa y cuyo coeficiente de arrastre puede obedecer a:

$$C = \frac{0{,}455}{(\lg Re)^{2{,}58}} \quad ; \quad Re = \frac{V L}{\upsilon}$$

En la capa límite la corriente es laminar en la primera parte del cuerpo, y después turbulenta debajo de una subcapa laminar (analogía de Prandtl). La resistencia de rozamiento depende de la capa límite, en la que se forman los torbellinos, que al pasar al campo de fluido restante originan la estela.