XVII.- RADIACIÓN TÉRMICA
FUNDAMENTOS Y FACTORES DE FORMA

pfernandezdiez.es

XVII.1.- INTRODUCCIÓN

La forma radiativa de la transmisión del calor se caracteriza porque la energía se transporta en forma de ondas electromagnéticas, que se propagan a la velocidad de la luz. El transporte de energía por radiación se puede realizar entre superficies separadas por el vacío; así por ejemplo, el Sol transmite energía a la Tierra por radiación a través del espacio que, una vez interceptada por la Tierra, se transforma en otras fuentes de energía.

La *teoría ondulatoria* establece que la radiación se comporta como una onda que oscila con una frecuencia ν y una longitud de onda λ.

El producto de la frecuencia por la longitud de onda es la velocidad $\vec{c}$ de la luz: $c = \lambda\ \nu$

La *teoría corpuscular* admite que la energía radiante se transporta en forma de fotones. Cada fotón se propaga con la velocidad de la luz a un nivel energético de la forma $e = h\ \nu$ en la que h es la constante de Planck.

Los fotones de mayor frecuencia poseen más energía que los de menor frecuencia. Cuando un cuerpo se calienta, los electrones libres pueden saltar a niveles de mayor energía o niveles excitados; cuando un electrón vuelve a su nivel energético inferior emite un fotón cuya energía es igual a la diferencia energética entre el estado excitado y el estado fundamental. En toda superficie y en cualquier instante existen numerosos electrones que experimentan cambios en su nivel energético y, por lo tanto, la energía que abandona esta superficie se distribuye dentro de un espectro de frecuencias.

La energía se emite solamente en función de la temperatura del cuerpo; la energía que abandona la superficie se llama *radiación térmica*. En el extremo del espectro correspondiente a longitudes de onda pequeñas están los rayos X, mientras que en el otro extremo del espectro están las ondas de radio; entre estos límites está la radiación térmica que se emite por un cuerpo que depende

exclusivamente de su temperatura; el intervalo completo de todas las longitudes de onda constituye el espectro electromagnético, que se subdivide en un cierto número de intervalos de longitudes de onda, correspondientes a unas fenomenologías características, como ultravioleta, visible, infrarrojo, etc.

La radiación térmica emitida por una superficie en función de su temperatura se corresponde con las longitudes de onda comprendidas entre, 10^{-7} m y 10^{-4} m.

El ojo humano es capaz de detectar las ondas electromagnéticas comprendidas en el intervalo, $3{,}8.10^{-7}$ m ÷ $7{,}6.10^{-7}$ m, que constituye la *radiación visible* del espectro electromagnético; es una porción muy pequeña del espectro completo que, a su vez, se encuentra en el intervalo correspondiente a la radiación térmica.

Las longitudes de onda se miden en $\begin{cases} 1\,\text{Å} = 1\,Angstrom = 10^{-10}\,m = 10^{-8}\,cm \\ 1\,\mu m = 1\,micrón = 10^{-6}\,m = 10^{4}\,\text{Å} \end{cases}$

XVII.2.- FÍSICA DE LA RADIACIÓN

Cuerpo negro.- No todas las superficies emiten o absorben la misma cantidad de energía radiante cuando se calientan a la misma temperatura. Un cuerpo que emite (radiación difusa) o absorbe la máxima cantidad de energía a una temperatura determinada es un *cuerpo negro*, que no es más que un modelo ideal al que se pueden aproximar en la práctica los cuerpos reales recubriendo su superficie con determinadas pinturas o modificando su forma; es, por lo tanto, un cuerpo estándar con el que pueden compararse otros cuerpos radiadores.

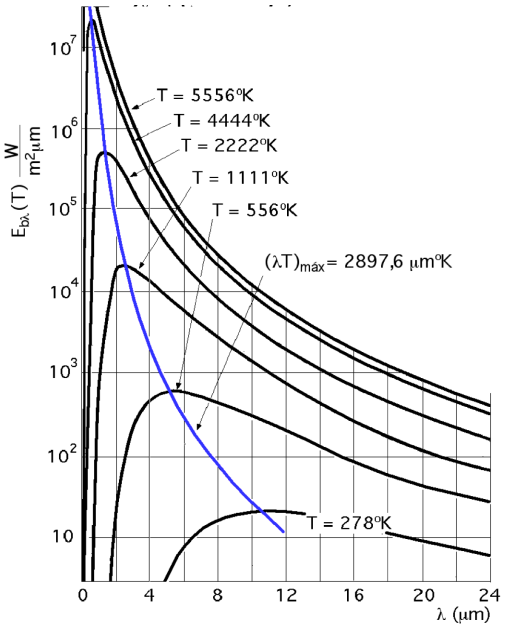


Fig XVII.1.- Poder emisivo espectral del cuerpo negro y ley del desplazamiento de Wien

Ley de Planck.- Cuando un cuerpo negro se calienta a una temperatura T, emite fotones desde su superficie, los cuales poseen una distribución determinada de energía que depende de la temperatura superficial; Max Planck en 1900 demostró que la energía emitida por un cuerpo negro a una longitud de onda λ y temperatura T es de la forma:

$$E_{b\lambda}(T) = \frac{C_1}{\lambda^5\ (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)},\ \text{siendo:}\ \begin{cases} C_1 = 3{,}7418_x 10^{-16}\ Wm^2 \\ C_2 = 1{,}4388_x 10^{-2} m^oK \end{cases}$$

en la que $E_{b\lambda}\ (W/m^2)$ es la potencia emisiva espectral o monocromática del cuerpo negro a la temperatura T.

La variación de la potencia emisiva monocromática del cuerpo negro con la temperatura y con la longitud de

onda, se denomina *ley de Planck,* Fig XVII.1. La energía radiativa emitida por una superficie negra aumenta con la temperatura; la potencia emisiva pasa por un valor máximo para una longitud de onda determinada que depende de la temperatura a que se encuentre; la longitud de onda disminuye cuando la temperatura de la superficie aumenta.

Ley del desplazamiento de Wien.- La longitud de onda a la cual la potencia emisiva del cuerpo negro alcanza un valor máximo para una temperatura dada, se deduce de la ley de Planck imponiendo la condición de máximo:

$$\frac{dE_{b\lambda}(T)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{C_1}{\lambda^5 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)}\right\}_{T = Cte} = 0$$

El resultado de esta operación es:

$$\lambda_{máx} T = 2{,}898.10^{-3} \ (m°K)$$

en la que $\lambda_{máx}$ es la longitud de onda correspondiente al máximo de potencia emisiva monocromática de una superficie negra, a la temperatura T; esta ecuación expresa la ley del desplazamiento de Wien; el valor máximo de la potencia emisiva monocromática del cuerpo negro se puede obtener sustituyendo la ecuación del desplazamiento de Wien en la ecuación de la ley de Planck, resultando:

$$(E_{b\lambda})_{máx} = 1{,}287.10^{-5} T^5 \ (W/m^3)$$

Para comprender los resultados de la ley del desplazamiento de Wien vamos a recurrir al siguiente ejemplo: *Supongamos que una corriente eléctrica pasa a través de un filamento haciendo aumentar su temperatura; a temperaturas relativamente bajas, por debajo de 600°C, la longitud de onda correspondiente al máximo de potencia emisiva del filamento es de unos 3,2.10^{-6} m, 3,2 μm ó 32000 Å en la región del infrarrojo; se puede apreciar que el filamento emite energía radiante con solo acercar la mano, pero nuestros ojos son incapaces de detectar radiación visible, pues sólo una cantidad insignificante de energía corresponde al intervalo de longitudes de onda del espectro visible; si la temperatura del filamento sigue creciendo, la cantidad de energía radiante aumenta y una mayor parte de ella se emite a longitudes de onda más cortas.*

Por encima de 700°C, una pequeña cantidad de la energía se encuentra comprendida en el intervalo de longitudes de onda largas (extremo rojo del espectro visible); nuestros ojos pueden detectar ya esta radiación, apareciendo el filamento de un color rojo oscuro. Si la temperatura se incrementa todavía más, una mayor parte de la energía cae en la región visible del espectro y por encima de los 1.300°C se incluyen todas las longitudes de onda visibles de modo que el filamento aparece al rojo blanco.

Un ejemplo de fuente energética a alta temperatura es el Sol; su superficie exterior posee una temperatura del orden de 5.800°K; de acuerdo con la ley de Wien el valor de $\lambda_{máx}$ a esta temperatura es de 5,2.10^{-7} m, ó 0,52 μm, próximo al centro de la región visible.

El ojo humano no responde a la energía radiante fuera del intervalo visible, y sólo puede predecir el comportamiento superficial en un intervalo de longitudes de onda muy restringido; existen algunas superficies que se comportan como buenos absorbentes en el intervalo visible y, por tanto, aparecen de color oscuro a nuestros ojos; en cambio, su comportamiento puede modificarse en la zona del infrarrojo y ser aquí malos absorbentes.

Por el contrario, existen superficies que son pobres absorbentes de radiación en el intervalo correspondiente al espectro visible y aparecen blancas a nuestra vista, mientras que son unos absorbentes excelentes a longitudes de onda fuera del intervalo del espectro visible. Un objeto se considera *cuerpo cuasiblanco* cuando refleja casi todas las radiaciones del espectro visible sin absorber prácticamente ninguna; un cuerpo negro absorbería todas las radiaciones del espectro visible y no reflejaría ninguna.

Ley de Stefan-Boltzman.- La cantidad total de energía radiativa que por unidad de área emite una superficie a la temperatura absoluta T y a todas las longitudes de onda, se denomina poder emisivo total. Si la superficie corresponde a un cuerpo negro, el poder emisivo total viene dado por la integral de la distribución de Planck para todas las longitudes de onda:

$$E_b(T) = \int_0^\infty E_{b_\lambda}(T)\, d\lambda = \int_0^\infty \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1\right)}\, d\lambda = \sigma\, T^4$$

resultado que se conoce como ley de Stefan-Boltzman, siendo:

$$\sigma = \left(\frac{\pi}{C_2}\right)^4 \frac{C_1}{15} = 5{,}67.10^{-8}\ \frac{W}{m^2\, {}^oK^4}$$

y C_1 y C_2 son las constantes de la ley de Planck, viniendo E_b en unidades de flujo térmico W/m^2.

Como el valor de σ es muy pequeño, los efectos de la radiación a bajas temperaturas suelen ser despreciables; a la temperatura ambiente, 300°K, la potencia emisiva total de un cuerpo negro es aproximadamente de 460 W/m^2, que es del orden de la décima parte del flujo de calor transferido desde una superficie a un fluido por convección, cuando el coeficiente de transmisión convectiva del calor y la diferencia de temperatura toman unos valores bajos, del orden de 100 W/m^2°K y 50°K, respectivamente. Por ello, a temperaturas bajas es justificable, en la mayoría de los casos, el despreciar los efectos radiactivos; sin embargo, su importancia es grande a altas temperaturas, ya que la potencia emisiva crece con la cuarta potencia de la temperatura absoluta.

FUNCIONES DE RADIACIÓN.- Si el poder emisivo monocromático del cuerpo negro, dado por la ley de Planck, se integra para todo el intervalo de longitudes de onda, desde ($\lambda = 0$) hasta ($\lambda = \lambda_1$), el resultado es la energía radiativa total emitida por el cuerpo negro a la temperatura T entre las longitudes de onda 0 y λ_1; al realizar la integración se demuestra que el resultado es sólo

función del producto (λ_1T):

$$\int_0^{\lambda_1} E_{b_\lambda}(T)\, d\lambda = E_b(0 \rightarrow \lambda_1 T)$$

Para determinar la cantidad total de energía radiativa emitida entre las longitudes de onda λ_1 y λ_2 para una superficie negra a la temperatura T basta con hallar la diferencia entre las integrales:

$$\int_0^{\lambda_2} E_{b_\lambda}(T)\, d\lambda - \int_0^{\lambda_1} E_{b_\lambda}(T)\, d\lambda = E_b(0 \rightarrow \lambda_2 T) - E_b(0 \rightarrow \lambda_1 T)$$

Si se quiere conocer el tanto por ciento de la energía total del cuerpo negro emitida en todo el espectro, que se corresponda, por ejemplo, con un intervalo de longitudes de onda $(\lambda_1 < \lambda < \lambda_2)$ se divide la ecuación anterior por:

$$E_b(T) = \int_0^{\infty} E_{b_\lambda}(T)\, d\lambda = \sigma\, T^4$$

por lo que:

El porcentaje de la energía radiativa del cuerpo negro correspondiente al intervalo de longitudes de onda $(\lambda_1 < \lambda < \lambda_2)$ *es igual a:*

$$\frac{E_b(0 \rightarrow \lambda_2 T) - E_b(0 \rightarrow \lambda_1 T)}{\sigma\, T^4}$$

en la que los valores de $\frac{E_b(0 \rightarrow \lambda\, T)}{\sigma\, T^4}$ están recogidos en la Tabla XVII.1, en función del producto $\lambda\, T$ en unidades SI; se conocen como Funciones de Radiación.

XVII.3.- TRANSMISIÓN DE CALOR POR RADIACIÓN

La energía transmitida en forma de calor se hace mediante ondas electromagnéticas a la velocidad de la luz; la energía que abandona una superficie en forma de calor, por radiación, depende de su temperatura absoluta y de la naturaleza de la superficie.

Un radiador perfecto o cuerpo negro, emite un flujo de energía por radiación a través de su superficie, dado por la ecuación:

$$q_r = \sigma\, A\, T^4 = A\, E_b\,, \text{ siendo: } \begin{cases} \sigma = 5{,}67.10^{-8}\, W/m^2\, {}^oK^4 \text{ la constante de Stefan-Boltzman} \\ A \text{ el área superficial en } m^2\text{, y } T \text{ la temperatura superficial en } {}^oK \end{cases}$$

Esta ecuación dice que *cualquier superficie irradia calor proporcionalmente a la cuarta potencia de su temperatura absoluta*; aunque la emisión es independiente del medio exterior, la medida de la energía radiante requiere de una temperatura de referencia, como puede ser la de otro sistema

que reciba la energía transferida, y así poder obtener a partir de esta referencia la transferencia neta de energía radiante.

Tabla XVII.1.- Funciones de radiación del cuerpo negro

λT	$\frac{E_b(0 \to \lambda T)}{\sigma T^4}$	λT	$\frac{E_b(0 \to \lambda T)}{\sigma T^4}$	λT	$\frac{E_b(0 \to \lambda T)}{\sigma T^4}$
0,2	3,41796E-26	4,2	0,516046	8,5	0,874666
0,4	1,86468E-12	4,4	0,548830	9,0	0,890090
0,6	0,00000009293	4,6	0,579316	9,5	0,903147
0,8	0,0000164351	4,8	0,607597	10,0	0,914263
1,0	0,00032078	5,0	0,633786	10,5	0,923775
1,2	0,00213431	5,2	0,658011	11,0	0,931956
1,4	0,00779084	5,4	0,680402	11,5	0,939027
1,6	0,0197204	5,6	0,701090	12,0	0,945167
1,8	0,0393449	5,8	0,720203	13,0	0,955210
2,0	0,0667347	6,0	0,737864	14,0	0,962970
2,2	0,100897	6,2	0,754187	15,0	0,969056
2,4	0,140268	6,4	0,769232	16,0	0,973890
2,6	0,183135	6,6	0,783248	18,0	0,980939
2,8	0,227908	6,8	0,796180	20,0	0,985683
3,0	0,273252	7,0	0,808160	25,0	0,992299
3,2	0,318124	7,2	0,819270	30,0	0,995427
3,4	0,361760	7,4	0,829580	40,0	0,998057
3,6	0,403633	7,6	0,839157	50,0	0,999045
3,8	0,443411	7,8	0,848060	75,0	0,999807
4,0	0,480907	8,0	0,856344	100,0	1

Si un *cuerpo negro* A_1 irradia a un recinto A_2 que le rodea completamente, y que se puede considerar como una superficie negra, la transferencia neta de energía radiante, viene dada por:

$$q_r = \sigma\ A_1 (T_1^4 - T_2^4) = A_1 (E_{b1} - E_{b2})$$

siendo A_1 el área superficial del cuerpo negro emisor, T_1 la temperatura del cuerpo negro emisor y T_2 la temperatura del recinto, ambas en °K.

Si un cuerpo negro A_1 irradia a otro cuerpo negro A_2 la transferencia neta de energía radiante viene dada por:

$$q_r = \sigma\ A_1\ F_{12} (T_1^4 - T_2^4)$$

en la que $F_{1\text{-}2}$ se conoce como *factor de forma o factor de visión*, que modifica la ecuación de los radiadores perfectos teniendo en cuenta las geometrías relativas de los cuerpos.

Los cuerpos reales no cumplen las especificaciones de un radiador ideal, sino que emiten radiación a un ritmo inferior al de los cuerpos negros. Si a una temperatura igual a la de un cuerpo negro emiten una fracción constante de la emisión correspondiente a un cuerpo negro, para cada longitud de onda, se denominan cuerpos grises.

Un *cuerpo gris* emite radiación según:

$$q_r = \sigma \ A_1 \ \varepsilon_1 \ T_1^4$$

La energía radiante neta transferida a la temperatura T_1 a un cuerpo negro que lo rodea, (medio exterior), a la temperatura T_2 es:

$$q_r = \sigma \ A_1 \ \varepsilon_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

en la que el subíndice 1 se corresponde con el cuerpo gris, siendo ε_1 la emitancia del mismo, igual a la relación entre la emisión de la superficie gris y la emisión de un radiador perfecto a la misma temperatura.

Si ninguno de los dos cuerpos es un radiador perfecto, pero existe entre los mismos una determinada relación geométrica, la energía radiante neta transferida entre ellos viene dado por:

$$q_r = A_1 \ F_{12}^* \ (E_{b1} - E_{b2}) = A_1 \ F_{12}^* \ \sigma \ (T_1^4 - T_2^4)$$

en la que F_{12}^* es un factor de forma complejo que depende de las emisividades y de las geometrías relativas a los cuerpos.

XVII.4.- FACTOR DE FORMA DE LA RADIACIÓN

La transferencia de calor por radiación entre dos superficies cualquiera, se calcula determinando el factor de forma F_{12} , que se interpreta como la fracción de energía radiante total que abandona la superficie A_1, $(q_{1\rightarrow semiesfera})$ y llega directamente a una segunda superficie A_2, $(q_{1\rightarrow 2})$.

Factor de forma $dF_{dA_1 \rightarrow dA_2}$ ***entre dos superficies infinitesimales*** dA_1 ***y*** dA_2.- Para deducir una expresión del factor de forma

$$dF_{dA_1 \rightarrow dA_2} = \frac{dq_{dA_1 \rightarrow dA_2}}{dq_{dA_1 \rightarrow semiesfera}}$$

se puede partir de la Fig XVII.2, en la que dA_1 es la superficie emisora, dA_2 es la superficie receptora y dw_{12} el ángulo sólido subtendido por el área dA_2 desde dA_1.

La energía radiante $dq_{dA_1 \rightarrow dA_2}$ que se emite desde dA_1 y alcanza dA_2, viene dada por:

$$dq_{dA_1 \rightarrow dA_2} = dA_1 \ I_1 \ \cos \Phi_1 \ dw_{12} = \left| \ \frac{dw_{12}}{1^2} = \frac{dA_2 \ \cos \Phi_2}{r^2} \ \right| = \frac{I_1 \ \cos \Phi_1 \ \cos \Phi_2 \ dA_2}{r^2} \ dA_1$$

siendo: $\begin{cases} I_1 \ \cos \Phi_1 \text{ , la intensidad de la radiación contenida en el ángulo sólido } dw \\ r, \text{ la distancia entre las superficies } dA_1 \text{ y } dA_2 \end{cases}$

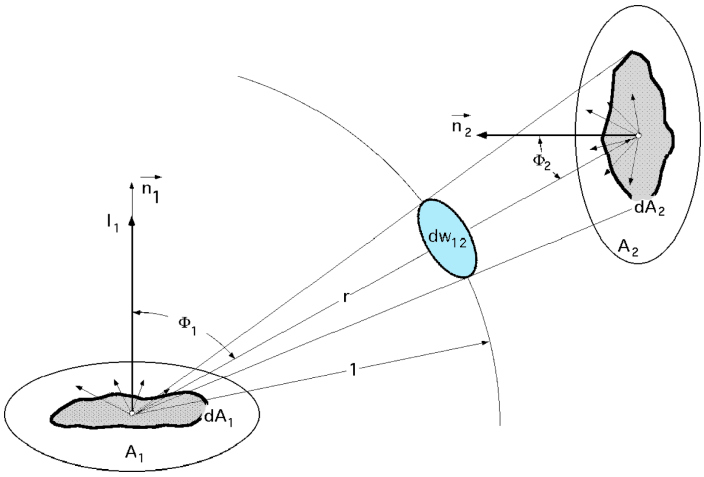


Fig XVII.2.- Nomenclatura para el cálculo de la intensidad de la radiación

Si se supone que la superficie emisora es difusa, la intensidad de la radiación emitida por dA_1 es independiente de la dirección, siendo los factores de forma función, únicamente, de la geometría y no de la intensidad de la radiación.

El flujo total que abandona dA_1 y que incide sobre una semiesfera que contenga a dA_2 y cuyo centro sea O en dA_1, se calcula a partir del ángulo sólido definido según la Fig XVII.3, en la forma:

$$dq_{dA_1 \rightarrow semiesfera} = Eb_1 \; dA_1$$

El poder emisivo E_{b1} del cuerpo negro emitido por unidad de superficie, es:

$$E_{b1} = \int I_1 \cos \Phi \; dw = \left| dw = \frac{dA_2}{r^2} = \frac{(r\, d\Phi)\,(r\, d\varphi \, sen\, \Phi)}{r^2} = sen\, \Phi \; d\Phi \; d\varphi \right| =$$

$$= \int I_1 \cos \Phi \, sen\, \Phi \; d\Phi \; d\varphi = I_1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\Phi=0}^{\pi/2} \cos \Phi \, sen\, \Phi \; d\Phi = \pi \; I_1$$

Una superficie i se puede considerar como superficie elemental si se cumple que $\frac{dA_i}{r^2} << 1$

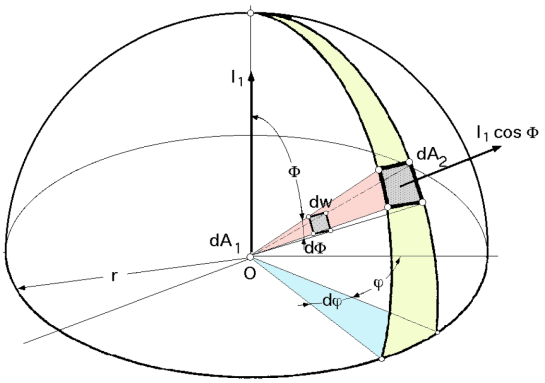


Fig XVII.3.- Nomenclatura para la definición del ángulo sólido dw en términos de Φ y φ

El flujo total emitido por dA_1 es:

$$dq_{dA_1 \to semiesfera} = Eb_1 \, dA_1 = \pi \, I_1 \, dA_1$$

por lo que:

$$dF_{dA_1 \to dA_2} = \frac{dq_{dA_1 \to dA_2}}{dq_{dA_1 \to semiesfera}} = \frac{I_1 \, \cos \Phi_1 \, \cos \Phi_2 \, \dfrac{dA_1 \, dA_2}{r^2}}{\pi \, I_1 \, dA_1} = \frac{\cos \Phi_1 \, \cos \Phi_2 \, dA_2}{\pi \, r^2}$$

En la misma forma se puede poner:

$$dF_{dA_2 \to dA_1} = \frac{\cos \Phi_2 \, \cos \Phi_1 \, dA_1}{\pi \, r^2}$$

y dividiéndolas miembro a miembro resulta:

$$dF_{dA_1 \to dA_2} \, dA_1 = dF_{dA_2 \to dA_1} \, dA_2$$

que se conoce como *regla de la reciprocidad.*

Factor de forma para una superficie finita y otra infinitesimal.- Muy pocas veces se determina el intercambio radiativo entre dos superficies infinitesimales; sin embargo, sí es bastante usual el intercambio entre una superficie muy pequeña dA_1 frente a una muy grande A_2; el factor de forma es:

$$F_{dA_1 \to A_2} = \int_{A_2} F_{dA_1 \to dA_2} = \int_{A_2} \frac{\cos \Phi_1 \, \cos \Phi_2 \, dA_2}{\pi \, r^2}$$

Por otro lado, si q_2 es el flujo térmico que sale de la superficie A_2, la fracción de esta energía radiante que llega a dA_1, y el factor de forma correspondiente, son:

$$q_2 \, A_2 \, F_{A_2 \to dA_1} = q_2 \int_{A_2} F_{dA_2 \to dA_1} \, dA_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F_{A_2 \to dA_1} = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} dF_{dA_2 \to dA_1} \, dA_2 = \frac{dA_1}{A_2} \int_{A_2} \frac{\cos \Phi_1 \, \cos \Phi_2 \, dA_2}{\pi \, r^2}$$

Dividiendo los factores de forma miembro a miembro se encuentra:

$$\frac{F_{dA_1 \to A_2}}{F_{A_2 \to dA_1}} = \frac{A_2}{dA_1} \quad \Rightarrow \quad dA_1 \, F_{dA_1 \to A_2} = A_2 \, F_{A_2 \to dA_1}$$

Factor de forma para dos superficies finitas.- Si se considera que las dos superficies A_1 y A_2 son finitas y emisoras difusas, que el flujo térmico q_1 que sale de la superficie A_1 es uniforme en toda la superficie, la energía radiante $(q_1 \, A_1)$ que sale de A_1 y llega directamente a A_2 es:

$$q_1 \, A_1 \, F_{A_1 \to A_2} = q_1 \int_{A_1} F_{dA_1 \to dA_2} \, dA_1$$

$$F_{A_1 \to A_2} = \frac{\int_{A_1} F_{dA_1 \to dA_2}\, dA_1}{A_1} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \Phi_1 \ \cos \Phi_2 \ dA_1 \ dA_2}{\pi \ r^2}$$

Si los subíndices A_1 y A_2 se intercambian, de forma que la superficie emisora sea la A_2 y la receptora la A_1, se tiene:

$$F_{A_2 \to A_1} = \frac{\int_{A_2} F_{dA_2 \to dA_1}\, dA_2}{A_2} = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos \Phi_2 \ \cos \Phi_1 \ dA_2 \ dA_1}{\pi \ r^2}$$

Dividiéndolas miembro a miembro resulta:

$$A_1 \ F_{A_1 \to A_2} = A_2 \ F_{A_2 \to A_1} \quad ; \quad A_1 \ F_{12} = A_2 \ F_{21}$$

Para dos superficies genéricas A_i y A_j se tiene:

$$A_i \ F_{i \to j} = A_j \ F_{j \to i}$$

Propiedades de los factores de forma.- Si las superficies forman un recinto, (por ejemplo 3 superficies), la energía emitida por la superficie A_1 tiene que incidir directamente sobre cada una de las tres superficies que conforman el recinto, es decir:

$$E_{\text{emitida superf (1)}} = E_{\text{que llega a la superf (1)}} + E_{\text{que llega a la superf (2)}} + E_{\text{que llega a la superf (3)}}$$

y dividiéndolas por el primer miembro de la ecuación, y teniendo en cuenta que la definición del factor de forma es $F = \frac{\text{Energía interceptada}}{\text{Energía emitida}}$, se encuentra que:

$$1 = F_{11} + F_{12} + F_{13}$$

que se conoce como *relación del recinto o de la sumatoria*.

Para n superficies que conforman el recinto: $\sum_{j=1}^{n} F_{i \to j} = 1$, *con :* $i = 1, 2, ..., n$

El factor F_{ii} se incluye en el recinto siempre que la superficie A_i sea cóncava, ya que ésta se puede ver a sí misma y, por lo tanto, una fracción de la energía que emite incidirá sobre alguna parte de ella.

Para superficies planas o convexas: $F_{i \to i} = 0$

Se han evaluado los factores de forma de radiación para muchas superficies que aparecen en ingeniería, cuya casuística se presenta en forma gráfica al final del capítulo. Las reglas anteriores de reciprocidad y de la sumatoria son útiles porque proporcionan relaciones simples que permiten evaluar los factores de forma de un recinto, si se conocen los demás; para determinar todos los facto-

res de forma posibles de un recinto, no se necesita calcular cada uno de ellos directamente, sino que se deben utilizar siempre las relaciones de reciprocidad y sumatoria. Si representamos todos los factores de forma posibles de un recinto de n superficies mediante la matriz:

$$F_{i \to j} = \begin{Bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & \cdots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & \cdots & F_{2n} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & \cdots & F_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{n1} & F_{n2} & F_{n3} & \cdots & F_{nn} \end{Bmatrix}$$

se observa que si el recinto tiene n superficies, hay que determinar n^2 factores de forma.

La regla de la reciprocidad proporciona otras relacionales adicionales: $\binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2\,!}$

La regla de la sumatoria proporciona n relaciones adicionales

El número total de factores de forma que se deben calcular para un recinto de n superficies es:

$$n^2 - \left(\frac{n\,(n-1)}{2\,!} + n\right) = \frac{n\,(n-1)}{2}$$

Si las superficies son convexas o planas, desaparecerán n factores de forma de una superficie con respecto a sí misma, por lo que el número total de factores de visión que se deben calcular es:

$$\frac{n\,(n-1)}{2} - n = \frac{n\,(n-3)}{2}$$

XVII.5.- ÁLGEBRA DE FACTORES DE FORMA

Los diagramas de factores de forma se pueden utilizar para la determinación de valores en geometrías de orden superior utilizando un método denominado álgebra de factores de forma. La distribución geométrica se descompone por medio del principio de la adición y sustracción aritmética de los factores de visión en distribuciones más sencillas para las que ya existen diagramas y ábacos del factor de forma.

a) Se desea evaluar el factor de forma F_{12} de la composición representada en la Fig XVII.4; como el álgebra de factores de forma es un simple enunciado del Primer Principio de la Termodinámica, implica que la energía que abandona la superficie A_1 y llega a A_3 tiene que ser igual a la suma de las que llegan a A_a y A_2.

Al ser $(A_3 = A_a + A_2)$ la conservación de la energía requiere que:

$$A_1\,F_{13} = A_1\,F_{1a} + A_1\,F_{12} \quad ; \quad F_{13} = F_{1a} + F_{12} \quad ; \quad F_{12} = F_{13} - F_{1a}$$

en la que F_{13} y F_{1a} vienen tabulados y por lo tanto F_{12} se puede determinar fácilmente.

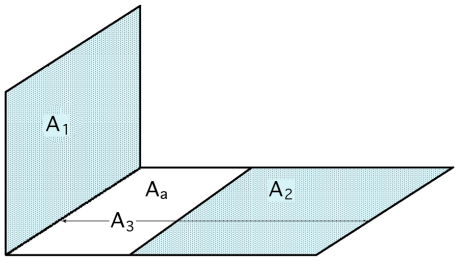


Fig XVII.4

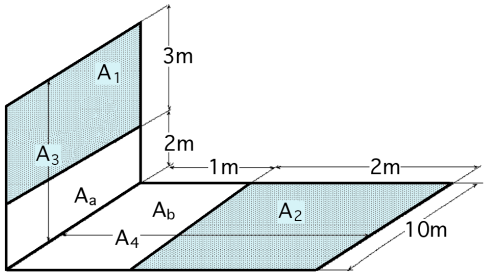


Fig XVII.5

Aplicando la recíproca se tiene:

$$A_3\ F_{31} = A_a\ F_{a1} + A_2\ F_{21} = A_1\ F_{13} \quad ; \quad F_{21} = F_{31}\frac{A_3}{A_2} - F_{a1}\frac{A_a}{A_2}$$

b) Para evaluar el factor de forma F_{12} para la geometría de la Fig XVII.5 en la que las superficies son:

$$A_3 = A_1 + A_a \quad ; \quad A_4 = A_b + A_2$$

aplicando lo anteriormente expuesto resulta:

$$A_3\ F_{34} = A_a\ F_{ab} + A_a\ F_{a2} + A_1\ F_{1b} + A_1\ F_{12}$$

F_{34} y F_{ab} se calculan mediante las gráficas indicadas anteriormente:

$$A_3\ F_{3b} = A_a\ F_{ab} + A_1\ F_{1b} \quad ; \quad F_{1b} = \frac{A_3}{A_1}\ F_{3b} - \frac{A_a}{A_1}\ F_{ab}$$

$$A_a\ F_{a4} = A_a\ F_{ab} + A_a\ F_{a2} \quad ; \quad F_{a2} = F_{a4} - F_{ab}$$

Combinando estas tres ecuaciones y despejando F_{12} se obtiene:

$$F_{12} = \frac{1}{A_1}(A_3\ F_{34} - A_a\ F_{ab} - A_a\ F_{a2} - A_1\ F_{1b}) = \frac{1}{A_1}(A_3\ F_{34} - A_3\ F_{3b} - A_a\ F_{a2}) =$$

$$= \frac{1}{A_1}(A_3\ F_{34} - A_3\ F_{3b} - A_a\ F_{a4} + A_a\ F_{ab})$$

Con los datos numéricos de la Fig XVII.5 los valores de estos factores de forma, son:

$$F_{34} = 0,19 \quad ; \quad F_{a4} = 0,32 \quad ; \quad F_{3b} = 0,08 \quad ; \quad F_{ab} = 0,18$$

$$F_{12} = \frac{(50 \times 0,19) - (50 \times 0,08) - (20 \times 0,32) + (20 \times 0,18)}{30} = 0,097$$

y el 9,7% de la energía difusa que deja la superficie A_1 incide directamente sobre la superficie A_2.

c) Como la reciprocidad relaciona áreas y factores de visión entre dos superficies que intercam-

bian radiación, vamos a considerar el ejemplo de la Fig XVII.6, en la que se han representado cuatro rectángulos de superficie A_1, A_2, A_3 y A_4.

En base a la reciprocidad se tiene:

$$A_1\ F_{1\to4} = A_4\ F_{4\to1} = \int_{A_1}\int_{A_4} \frac{\cos\Phi_1\ \cos\Phi_4\ dA_1\ dA_4}{\pi\ r^2} = \int_0^b\int_0^a\int_0^d\int_a^{a+c} \frac{\cos\Phi_1\ \cos\Phi_4}{\pi\ r^2}\ dx\ dy\ dx\ dz$$

$$A_3\ F_{3\to2} = A_2\ F_{2\to3} = \int_{A_3}\int_{A_2} \frac{\cos\Phi_2\ \cos\Phi_3\ dA_2\ dA_3}{\pi\ r'^2} = \int_0^d\int_0^a\int_0^b\int_a^{a+c} \frac{\cos\Phi_2\ \cos\Phi_3}{\pi\ r'^2}\ dx\ dy\ dx\ dz$$

Se observa que los límites de integración en ambos casos son iguales, por lo que existirán pares de elementos en ambas configuraciones con los mismos valores de r, r' y de ángulos Φ, de lo que se deduce:

$$A_1\ F_{1\text{-}4} = A_2\ F_{2\text{-}3} = A_3\ F_{3\text{-}2} = A_4\ F_{4\text{-}1}$$

y como:

$$(A_3 + A_4)\ F_{(3,4)\text{-}(1,2)} = A_3\ F_{3\text{-}1} + A_3\ F_{3\text{-}2} + A_4\ F_{4\text{-}1} + A_4\ F_{4\text{-}2} = A_3\ F_{3\text{-}1} + 2\ A_4\ F_{4\text{-}1} + A_4\ F_{4\text{-}2}$$

$$F_{4\text{-}1} = \frac{(A_3 + A_4)\ F_{(3,4)\text{-}(1,2)} - A_3\ F_{3\text{-}1} - A_4\ F_{4\text{-}2}}{2\ A_4}$$

y el factor de visión entre los rectángulos A_1 y A_4 se puede calcular en función de los factores de visión propios de rectángulos perpendiculares con un lado común.

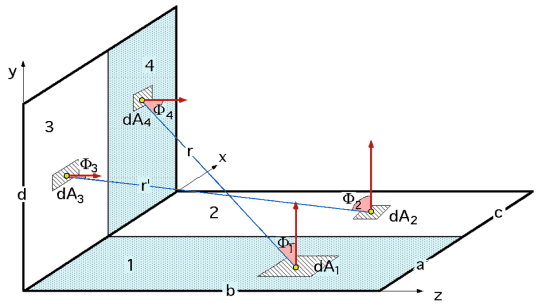


Fig XVII.6

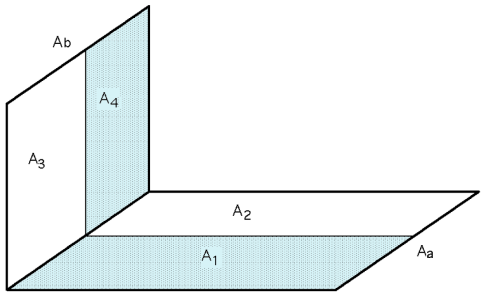


Fig XVII.7

Para evaluar el factor de forma F_{14} en la configuración (A_1, A_4) que se muestra en la Fig XVII.7, se definen las áreas imaginarias A_2 y A_3, pudiéndose poner:

$$A_1\ F_{14} = A_a\ F_{ab} - A_1\ F_{13} - A_2\ F_{24} - A_2\ F_{23}$$

El factor de forma F_{23} es desconocido, observándose es de una configuración similar a la del F_{14}; como sabemos que, $A_1\ F_{14} = A_2\ F_{23}$, el valor de F_{14} es:

$$F_{14} = \frac{A_a\, F_{ab} - A_1\, F_{13} - A_2\, F_{24}}{2\, A_1}$$

en la que sólo intervienen factores de forma del tipo de los encontrados en la Fig XVII.4.

Eliminación de superficies cóncavas.- La cara superior radiante A_1 de la Fig XVII.8 es cóncava, luego presenta con respecto a sí misma un factor de visión distinto de cero.

Si sobre esta configuración inicial imaginamos una nueva superficie A_{1^*} resultante de la eliminación de concavidades de la original, o lo que es lo mismo, formada por la superficie plana creada al tensar A_1, superficie que no se ve a sí misma, se puede poner teniendo en cuenta la reciprocidad y la sumatoria:

$$A_1\ F_{11^*} = A_{1^*} F_{1^*1} = \left| \begin{matrix} F_{1^*1} + F_{1^*1^*} = 1 \\ F_{1^*1^*} = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \quad F_{1^*1} = 1 \left| = A_{1^*} \quad \Rightarrow \quad F_{11^*} = \frac{A_{1^*}}{A_1} \right.$$

$$F_{11} + F_{11^*} = 1 \quad \Rightarrow \quad F_{11} = 1 - F_{11^*} = 1 - \frac{A_{1^*}}{A_1}$$

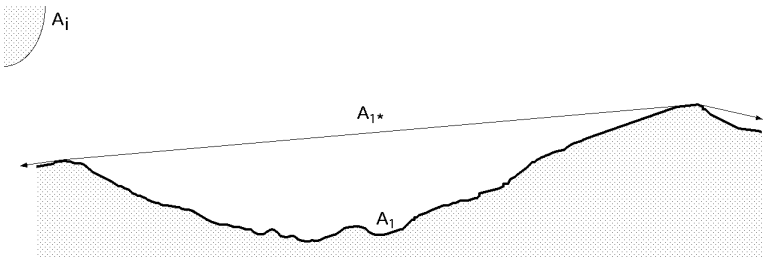


Fig XVII.8

Si la ecuación, $A_1\, F_{11^*} = A_{1^*}$, se multiplica por E_{b1}, resulta:

$$A_1\, F_{11^*}\ E_{b\,1} = A_{1^*}\ E_{b\,1} = q_r$$

que es la energía que abandona A_1 por radiación, e indica que la radiación emitida por una superficie cóncava equivale a la que emitiría la superficie mínima obtenida, al reemplazar las concavidades por superficies planas, supuestas a la misma temperatura. El sustituir el área cóncava A_1 por el área plana A_{1^*} no modifica los factores de visión del recinto respecto a otra superficie cualquiera i; por lo tanto, los F_{ij} para todo $(i \neq 1)$ y $(j \neq 1)$, ó 1^* se mantienen igual antes y después de la sustitución de A_1 por A_{1^*}.

A su vez, para las superficies A_1 y A_i se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ij} = 1 \quad ; \quad \begin{cases} F_{ii} + F_{i1} = 1 \\ F_{ii} + F_{i1^*} = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad F_{i1} = F_{i1^*} \quad \Rightarrow \quad A_i\ F_{i1} = A_i\ F_{i1^*} = A_{1^*}\ F_{1^*i}$$

que indica que en el recinto, a efectos de cálculo, es válida la sustitución del área A_1 por el área plana A_{1*}.

Factores de forma para tres superficies convexas generadas a lo largo de una recta.- Vamos a considerar un recinto formado por tres superficies planas o convexas A_1, A_2 y A_3, Fig XVII.9. Ninguna de las superficies tiene una curvatura positiva en la dirección de su radiación por lo que sólo pueden verse desde cada una de las otras dos; por lo tanto se puede poner:

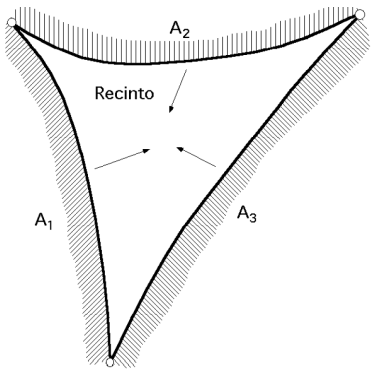


Fig XVII.9.- Recinto de tres superficies convexas

$$\left.\begin{array}{ll} F_{12} + F_{13} = 1 & ; \quad F_{11} = 0 \\ F_{21} + F_{23} = 1 & ; \quad F_{22} = 0 \\ F_{31} + F_{32} = 1 & ; \quad F_{33} = 0 \end{array}\right\}$$

Multiplicando la primera ecuación por A_1, la segunda por A_2 y la tercera por A_3, y teniendo en cuenta las relaciones recíprocas correspondientes, se reduce el número de incógnitas de 6 a 3, resultando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ll} A_1 F_{12} + A_1 F_{13} = A_1 & ; \quad A_1 F_{12} + A_1 F_{13} = A_1 \\ A_2 F_{21} + A_2 F_{23} = A_2 & ; \quad A_1 F_{12} + A_2 F_{23} = A_2 \\ A_3 F_{31} + A_3 F_{32} = A_3 & ; \quad A_1 F_{13} + A_2 F_{23} = A_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} F_{12} = \dfrac{A_1 + A_2 - A_3}{2 A_1} \\ F_{13} = \dfrac{A_1 + A_3 - A_2}{2 A_1} \\ F_{23} = \dfrac{A_2 + A_3 - A_1}{2 A_2} \end{array}\right.$$

Método de las cuerdas cruzadas.- Si se considera un recinto más complejo, cuya sección recta viene representada en la Fig XVII.10, y se desea determinar el intercambio de energía radiante entre las superficies A_1 y A_2 o lo que es lo mismo el producto, $A_1 F_{12}$, se recurre a la siguiente construcción:

Entre los bordes B y L de A_1 se tensa una cuerda que representa la sección del área efectiva A_{1*}; a continuación se traza la línea de longitud mínima por el interior del recinto entre los bordes B de A_1 y E de A_2, dando lugar a la línea (BCDE) = (a); haciendo lo mismo entre los bordes L de A_1 y F de A_2 se obtiene la línea (LKJHGF) = (d). El intercambio directo de energía radiante entre las superficies A_1 y A_2 es el mismo, prescindiendo de si ambas superficies están unidas por las líneas (BE) y (LF), o por las superficies primitivas, ya que ninguna de las partes que A_1 ve de A_2, o a la inversa, están afectadas por esta situación. A continuación se trazan las líneas de longitud mínima entre B y F, línea (BHGF) = (c), y entre L y E, línea (LKJE) = (b).

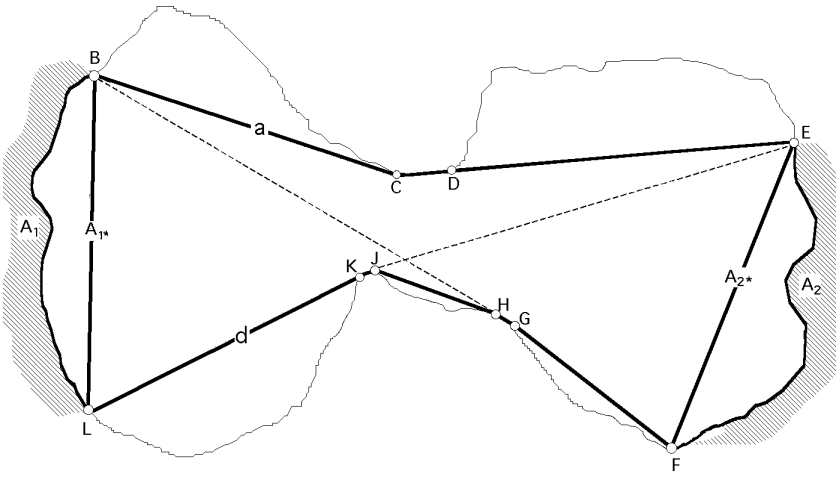


Fig XVII.10.- Método de las cuerdas cruzadas

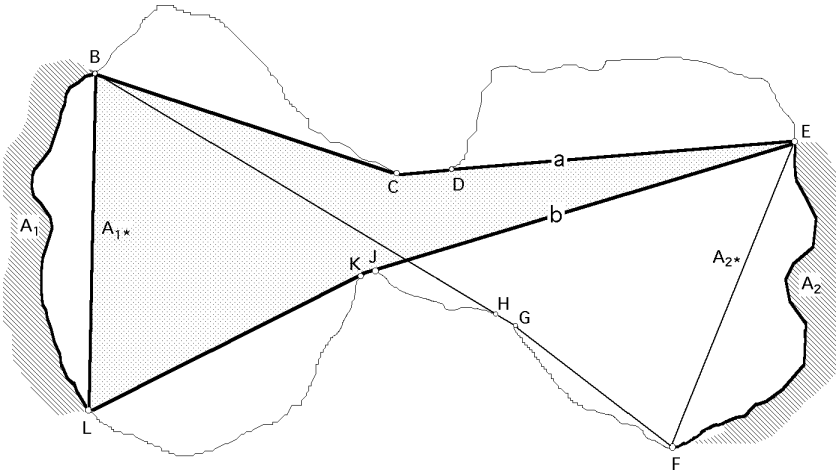


Fig XVII.11.- Método de las cuerdas cruzadas

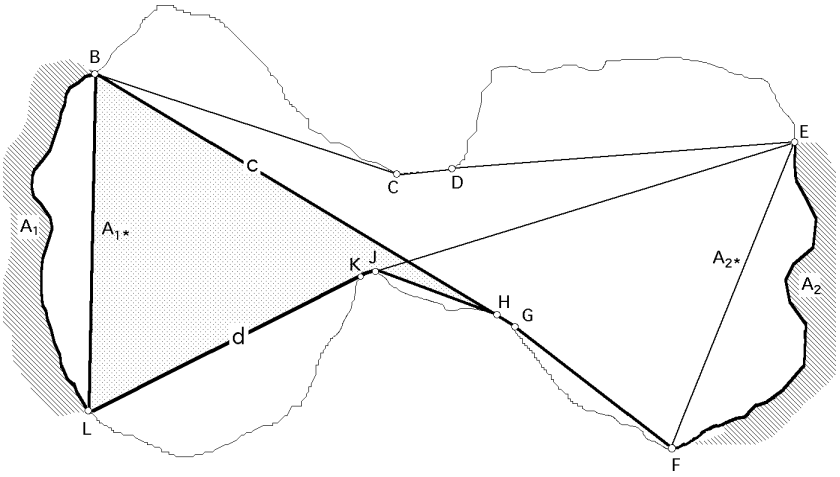


Fig XVII.12.- Método de las cuerdas cruzadas

De la Fig XVII.10 se deduce que desde A_{1^*} se pueden ver A_1, (BCDE) = (a), (FGHJKL) = (d), y A_2; aplicando la propiedad de la sumatoria de los factores de forma:

$$\left.\begin{array}{l} F_{1^*\text{-}a} + F_{1^*\text{-}d} + F_{1^*\text{-}2} + F_{1^*\text{-}1^*} = 1 \\ F_{1^*\text{-}1} + F_{1^*\text{-}1^*} = 1 \;;\; F_{1^*\text{-}1^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{1^*\text{-}1} = 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad F_{1^*\text{-}a} + F_{1^*\text{-}d} + F_{1^*\text{-}2} = 1$$

Multiplicándola por A_{1^*} resulta:

$$A_{1^*}\, F_{1^*\text{-}a} + A_{1^*}\, F_{1^*\text{-}d} + A_{1^*}\, F_{1^*\text{-}2} = A_{1^*}$$

y teniendo en cuenta que:

$$A_{1^*}\; F_{1^*\text{-}2} = A_2\; F_{2\text{-}1^*} = \left| F_{2\text{-}1^*} = F_{2\text{-}1} \right| = A_2\; F_{2\text{-}1} = A_1\; F_{1\text{-}2}$$

se obtiene:

$$A_{1^*}\, F_{1^*\text{-}a} + A_{1^*}\, F_{1^*\text{-}d} + A_1\, F_{1\text{-}2} = A_{1^*}$$

por lo que:

$$A_1\; F_{1\text{-}2} = A_{1^*} - A_{1^*}\; F_{1^*\text{-}a} - A_{1^*}\; F_{1^*\text{-}d} = \left| \begin{array}{l} A_{1^*}\; F_{1^*\text{-}a} = \dfrac{A_{1^*} + (a) - (b)}{2} \\ A_{1^*}\; F_{1^*\text{-}d} = \dfrac{A_{1^*} + (d) - (c)}{2} \end{array} \right| =$$

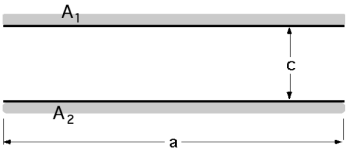
$$= A_{1^*} - \frac{A_{1^*} + (a) - (b)}{2} - \frac{A_{1^*} + (d) - (c)}{2} = \frac{\{(b) + (c)\} - \{(a) + (d)\}}{2}$$

en donde se ha considerado para el cálculo de $A_{1^*}\, F_{1^*\text{-}a}$ el recinto formado por tres superficies convexas A_{1^*}, *(a)* y *(b)*, Fig XVII.11, y para el cálculo de $A_{1^*}\, F_{1^*\text{-}d}$ el recinto formado por otras tres superficies convexas A_{1^*}, *(c)* y *(d)*, Fig XVII.12.

El producto AF para el intercambio radiativo entre superficies de este tipo, es la suma de las longitudes de las dos cuerdas que se cruzan, tensadas entre los extremos que representan las superficies, menos la suma de las longitudes de las dos cuerdas que no se cruzan, tensadas asimismo entre las superficies, y todo ello dividido por dos, (*Höttel*).

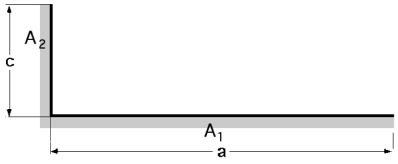
FACTORES DE FORMA DE RADIACIÓN (Configuraciones en 2 dimensiones)

1.- Placas paralelas del mismo ancho



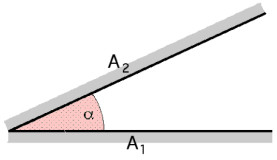
$$F_{A_1 \to A_2} = \sqrt{1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2} - \frac{c}{a}$$

2.- Placas contiguas largas



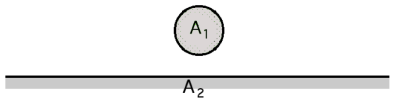
$$F_{A_1 \to A_2} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{c}{a} - \sqrt{1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2}\right\}$$

3.- Cuña simétrica larga



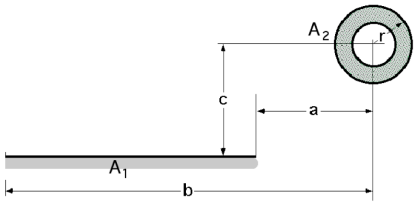
$$F_{A_1 \to A_2} = 1 - sen \frac{\alpha}{2}$$

4.- Cilindro largo paralelo, o esfera, respecto a una gran superficie plana



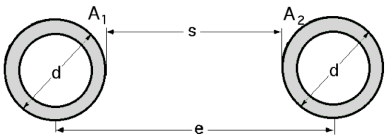
$$F_{A_1 \to A_2} = \frac{1}{2}$$

5.- Cilindro largo paralelo a una placa



$$F_{A_1 \to A_2} = \frac{r}{b - a} \left(arc\ tg \frac{b}{c} - arc\ tg \frac{a}{c} \right)$$

6.- Cilindros adyacentes largos y paralelos de diámetros iguales



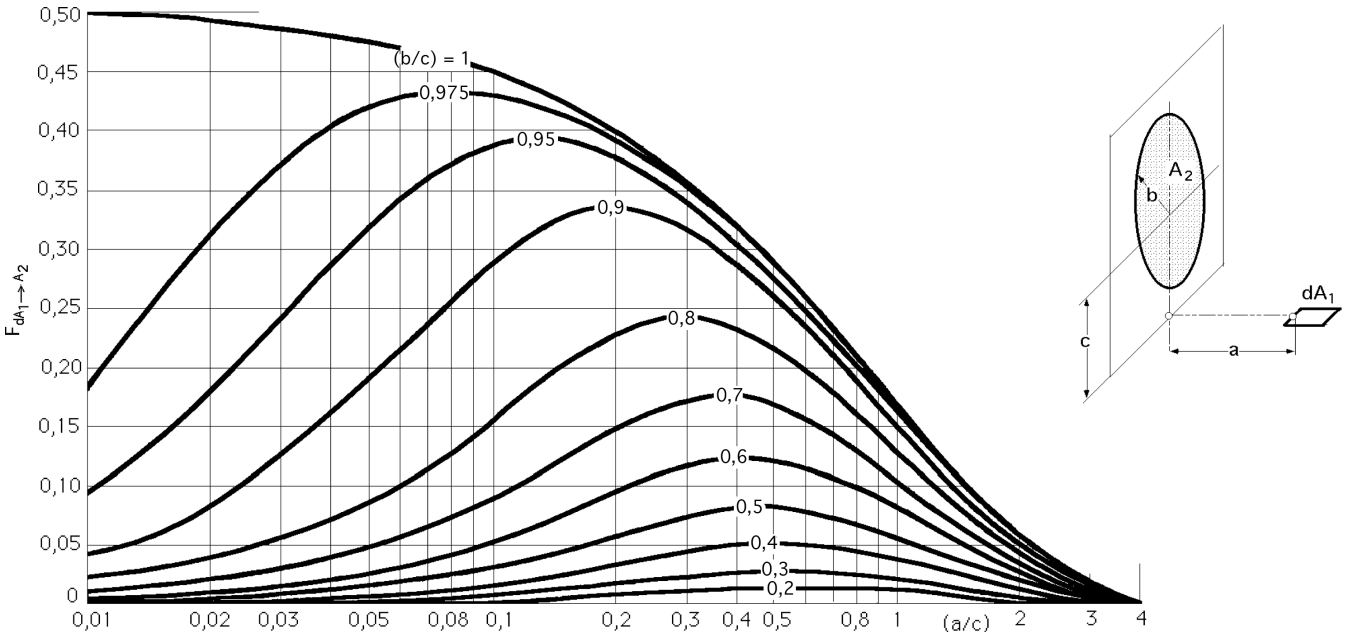
$$F_{A_1 \to A_2} = \frac{1}{p} \left(\sqrt{X^2 + 1} + arc\ sen \frac{1}{X} \right)$$

$$X = 1 + \frac{s}{d} = \frac{e}{d}$$

FACTORES DE FORMA DE RADIACIÓN (Configuraciones en 3 dimensiones)

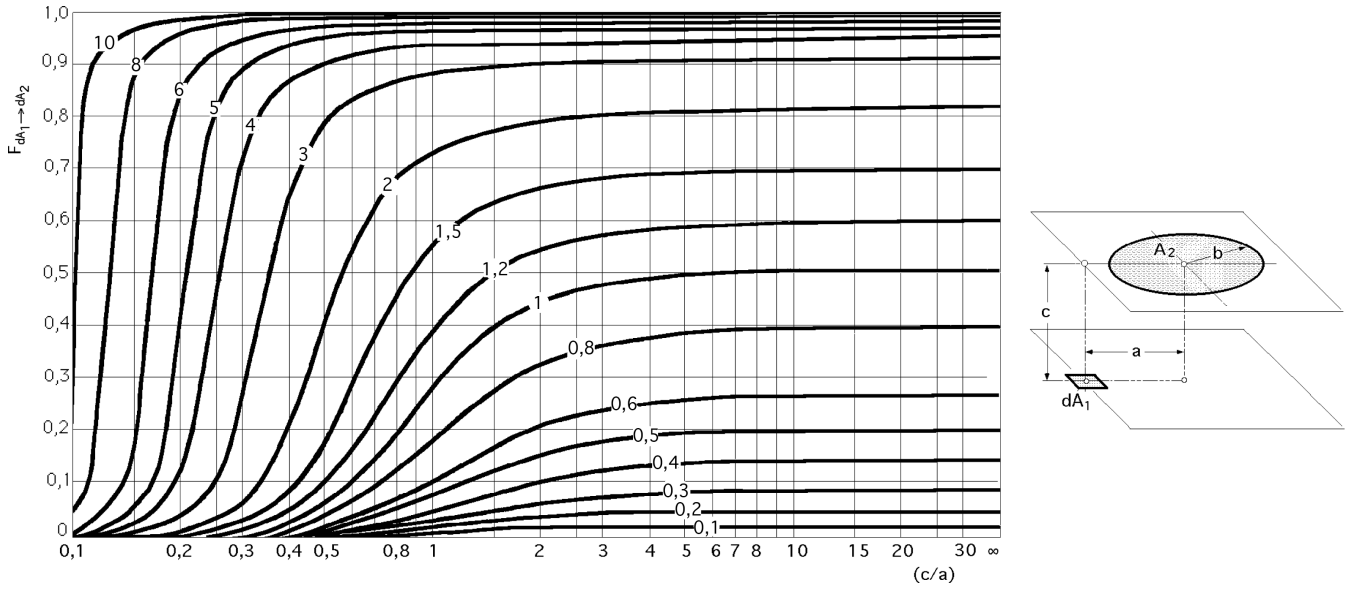
1.- Superficie elemental dA_1 y disco plano A_2 perpendicular al plano que contiene a dA_1

$$X = \frac{a}{c} \quad ; \quad Y = \frac{b}{c} \quad ; \quad F_{dA_1 \to A_2} = \frac{X}{2} \left(\frac{1 + X^2 + Y^2}{\sqrt{(1 + X^2 + Y^2)^2 - 4\,Y^2}} - 1 \right)$$



2.- Superficie elemental dA_1 y disco plano A_2 paralelo al plano que contiene a dA_1

$$X = \frac{c}{a} \;\; ; \;\; Y = \frac{b}{c} \;\; ; \;\; Z = 1 + (1 + Y^2) X^2 \;\; ; \;\; F_{dA_1 \to A_2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Z - 2 X^2 Y^2}{\sqrt{Z^2 - 4 Y^2 X^2}}\right)$$

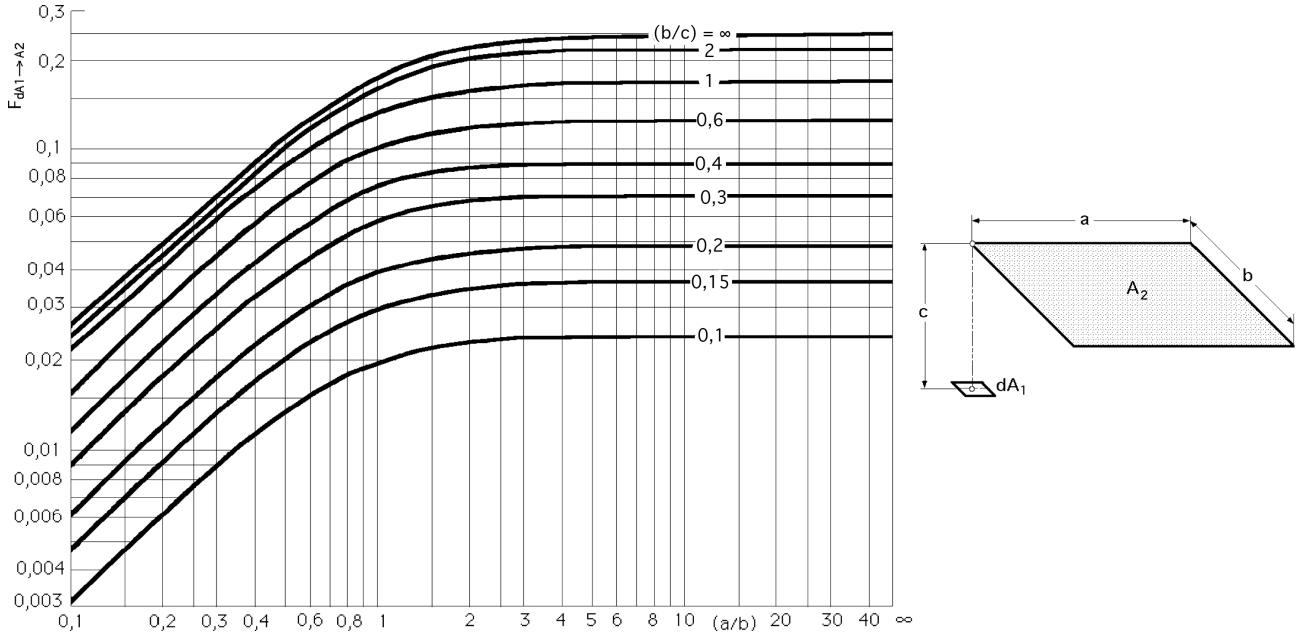


3.- Superficie elemental dA_1 paralela a un rectángulo A_2

Uno de los ángulos del rectángulo A_2 se encuentra en la normal a dA_1

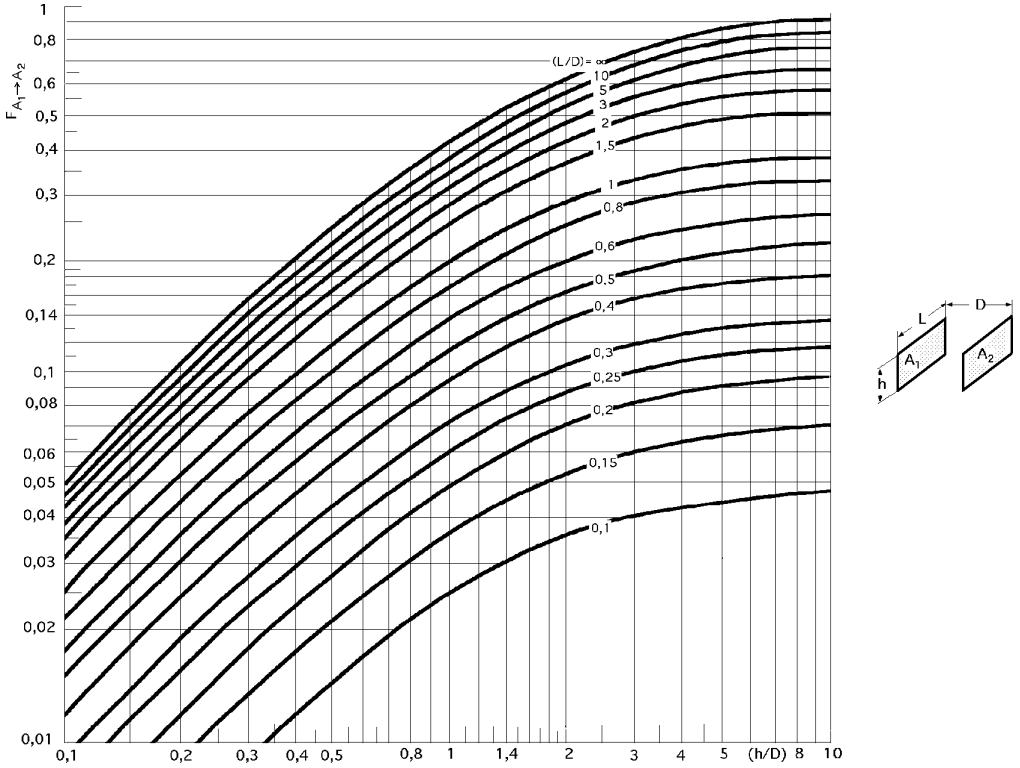
$$X = \frac{c}{a} \;\; ; \;\; Y = \frac{b}{c} \;\; ; \;\; F_{dA_1 \to A_2} = \frac{1}{2\,\pi} \left(\frac{X}{\sqrt{1 + X^2}} \; arc\,tg \; \frac{Y}{\sqrt{1 + X^2}} + \frac{Y}{\sqrt{1 + Y^2}} \; arc\,tg \; \frac{X}{\sqrt{1 + Y^2}} \right)$$

$$F_{dA_1 \to A_2} = \frac{1}{2\,\pi} \left(\frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}} \; arc\,sen \; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \; arc\,sen \; \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$



4- Dos rectángulos iguales y paralelos, $X = \frac{L}{D}$, $Y = \frac{h}{D}$

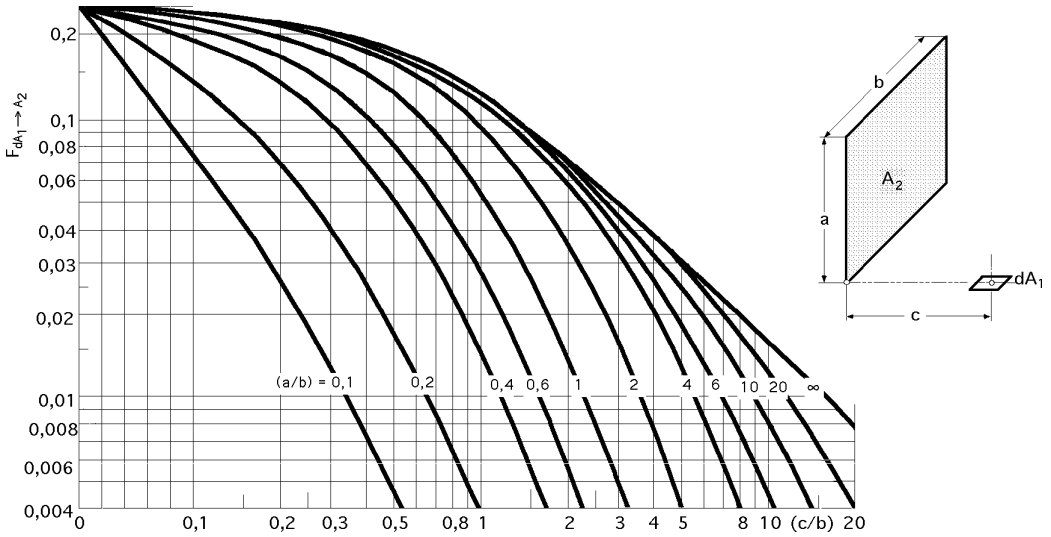
$$F_{A_1 \to A_2} = \frac{2}{\pi\, X\, Y} \left(\ln \sqrt{\frac{(1+X^2)\,(1+Y^2)}{1+X^2+Y^2}} + Y\sqrt{1+X^2}\ arc\ tg\ \frac{Y}{\sqrt{1+X^2}} + X\sqrt{1+Y^2}\ arc\ tg\ \frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} - Y\ arc\ tg\ Y - X\ arc\ tg\ X \right)$$



5.- Superficie elemental dA_1 *perpendicular a un rectángulo* A_2

Uno de los ángulos del rectángulo A_2 *se encuentra en línea con* dA_1

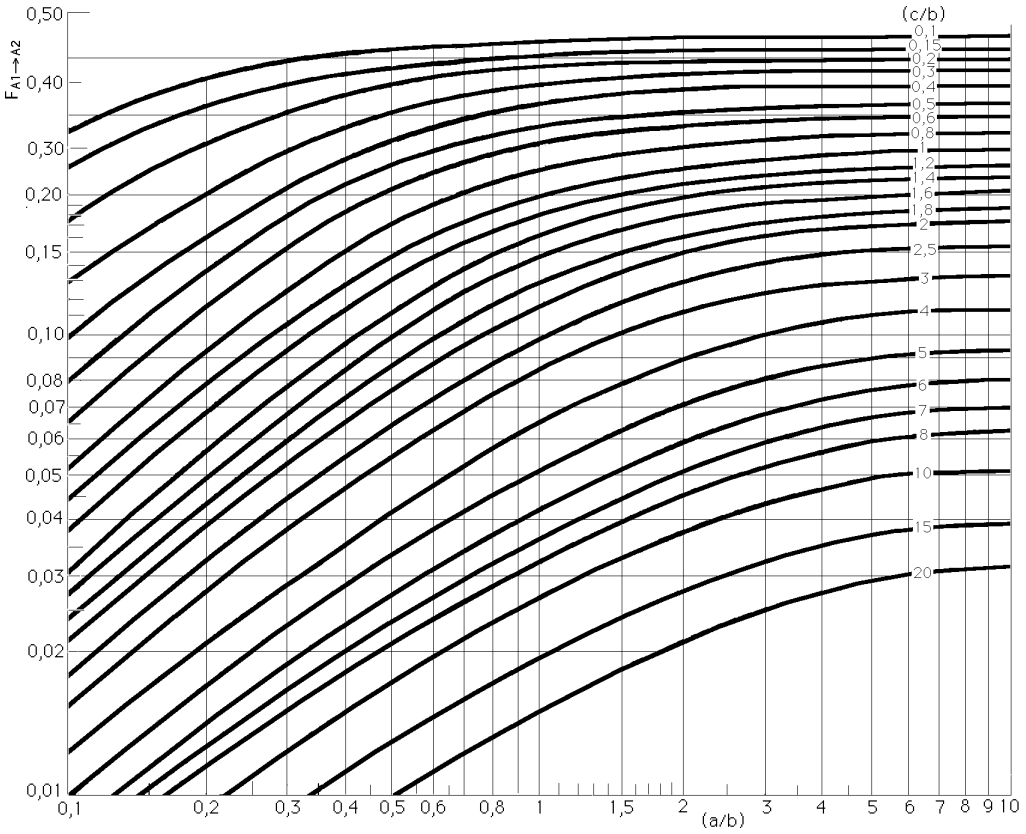
$$X = \frac{a}{b} \quad ; \quad Y = \frac{c}{b} \quad ; \quad A = \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}} \quad ; \quad F_{dA_1 \to A_2} = \frac{1}{2\,\pi} \left(arc\ tg\ \frac{1}{Y} - A\ Y\ arc\ tg\ A \right)$$

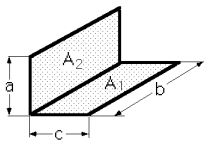


6.- Dos rectángulos con una arista común formando un ángulo de 90º

$$X = \frac{a}{b} \;\; ; \;\; Y = \frac{c}{b} \;\; ; \;\; Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

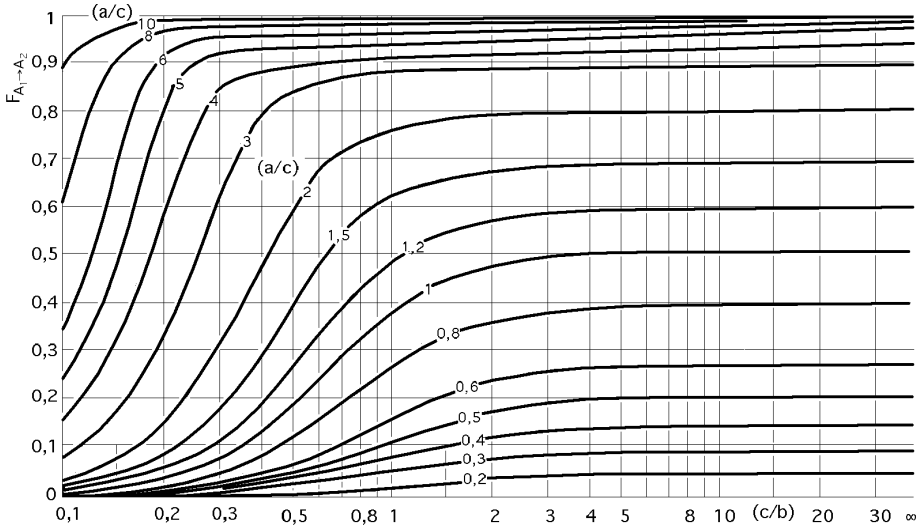
$$F_{A_1 \to A_2} = \frac{1}{\pi Y} [X \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{X} + Y \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{Y} - Z \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{Z} + \frac{1}{4} \ln \{ \frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+Z^2} (\frac{X^2(1+Z^2)}{Z^2(1+X^2)})^{X^2} (\frac{Y^2(1+Z^2)}{Z^2(1+Y^2)})^{Y^2} \}]$$

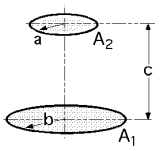




7.- Superficies circulares planas con una normal central común

$$X = \frac{a}{c} \;\; ; \;\; Y = \frac{c}{b} \;\; ; \;\; Z = 1 + (1 + X^2)\, Y^2 \;\; ; \;\; F_{A_1 \to A_2} = \frac{1}{2} (Z - \sqrt{Z^2 - 4 \frac{a^2}{b^2}})$$





8.- Dos rectángulos con una arista común formando un ángulo Φ

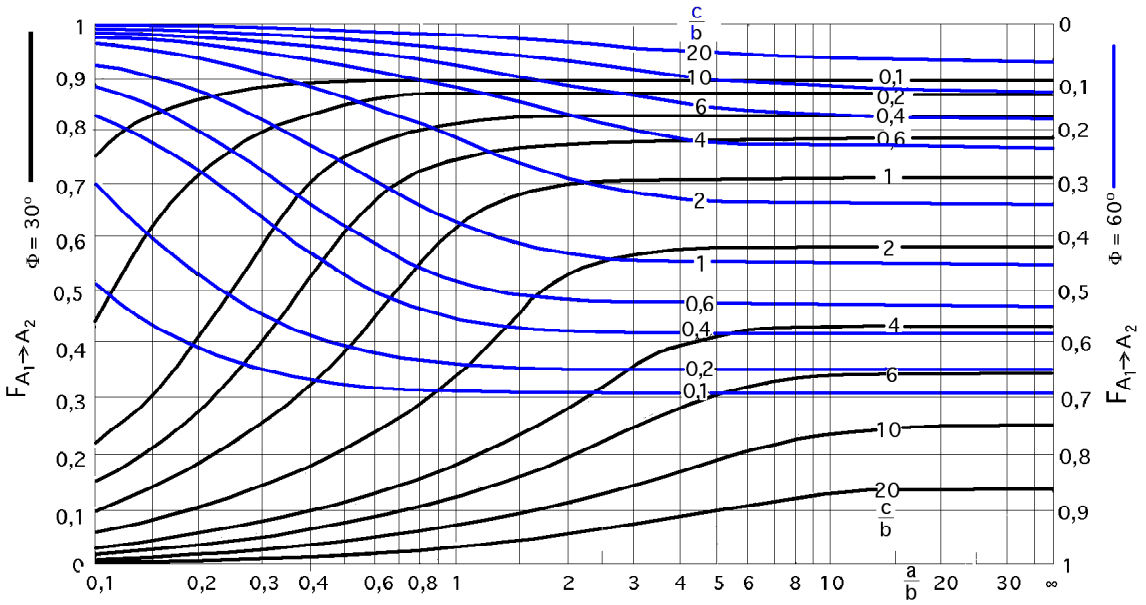
$$X = \frac{a}{b} \quad ; \quad Y = \frac{c}{b} \quad ; \quad Z^2 = X^2 + Y^2 - 2\,X\,Y\cos\Phi$$

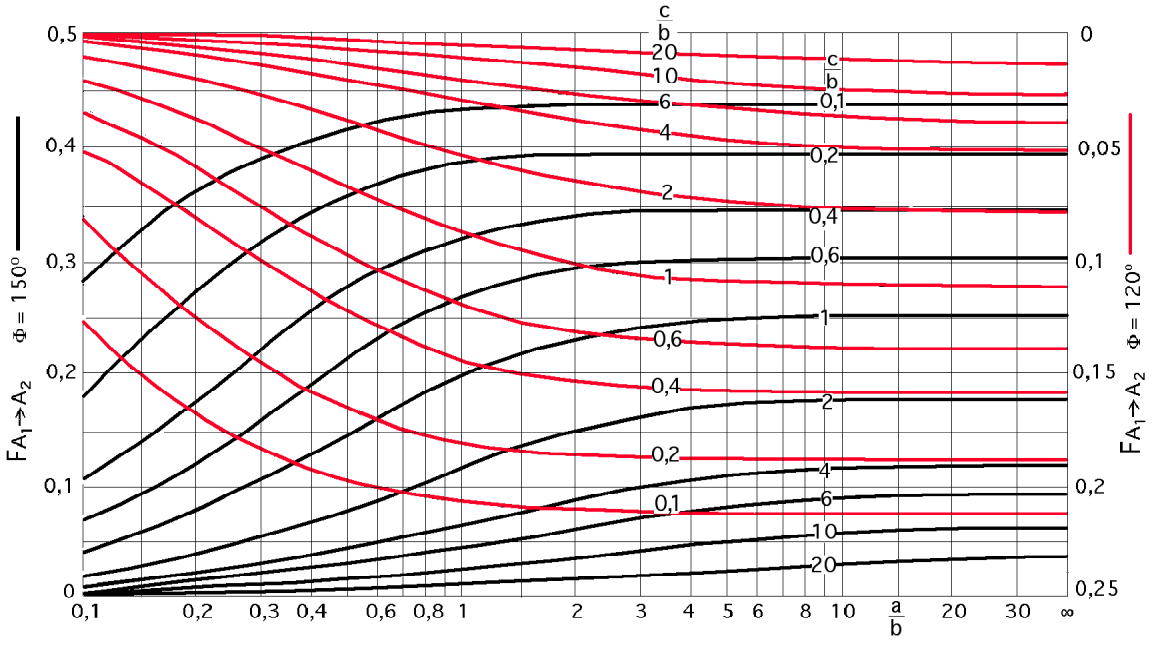
$$\pi\,Y\,F_{A_1\to A_2} = -\frac{sen\,2\Phi}{4}\{X\,Y\,sen\,\Phi - (\frac{\pi}{2} - \Phi)(X^2 + Y^2) + Y^2 arc\,tg\,\frac{X - Y\cos\Phi}{Y\,sen\,\Phi} + X^2 arc\,tg\,\frac{Y - X\cos\Phi}{X\,sen\,\Phi}\} +$$

$$+(\frac{1}{2} - \frac{sen^2\Phi}{4})\,ln\,\frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+Z} + Y^2\,ln\,\frac{Y^2(1+Z)}{Z(1+Y^2)} + X^2\,ln\,\frac{X^2(1+X^2)\cos^2\Phi}{Z(1+Z)\cos^2\Phi} + X\,arc\,tg\,\frac{1}{X} + Y\,arc\,tg\,\frac{1}{Y} - \sqrt{Z}\,arc\,tg\,\frac{1}{\sqrt{Z}} +$$

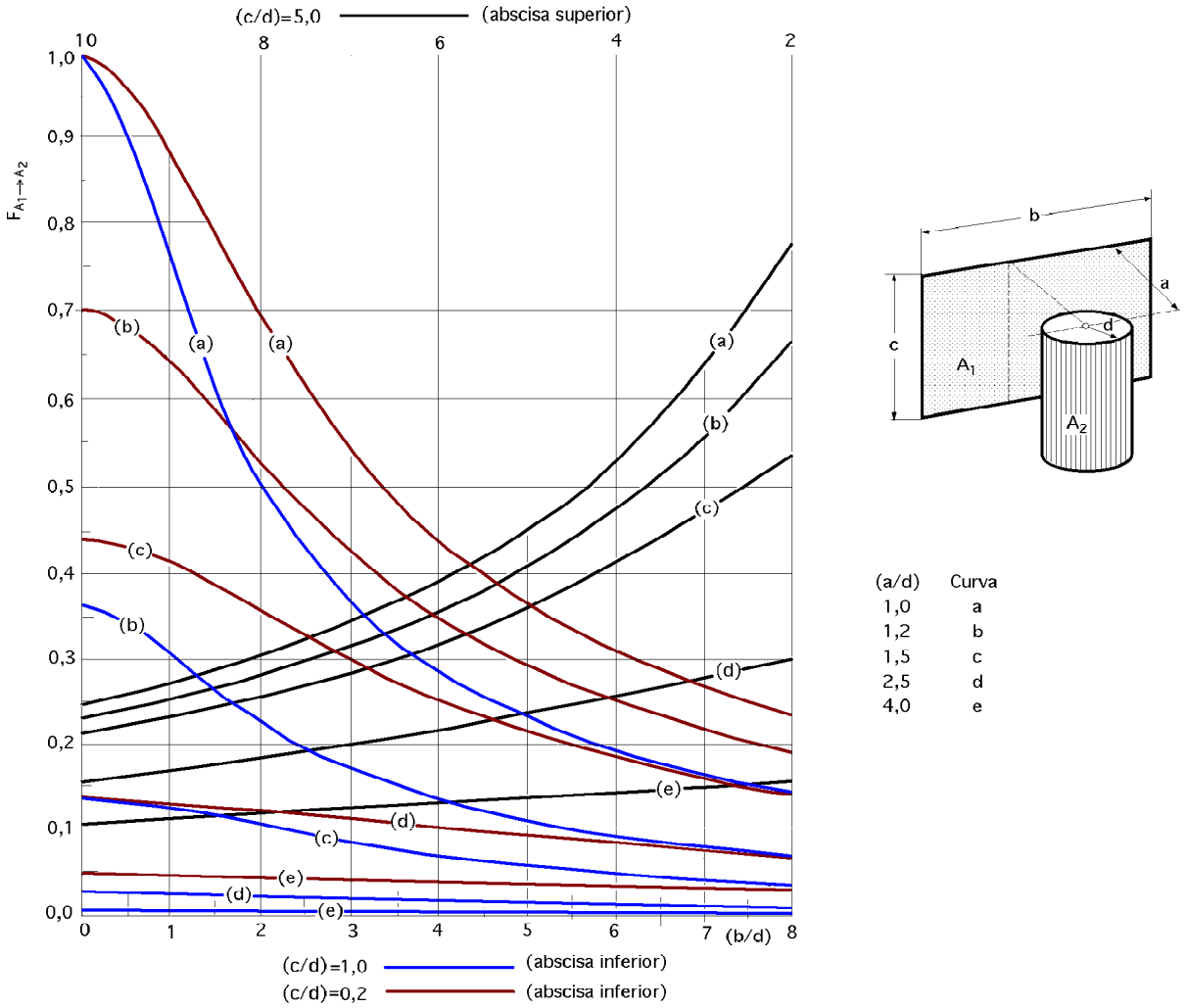
$$+\frac{sen\,\Phi\;sen\,2\,\Phi}{2}\,X\sqrt{1+X^2sen^2\Phi}\,(arc\,tg\,\frac{X\cos\Phi}{\sqrt{1+X^2sen^2\Phi}} + arc\,tg\,\frac{Y - X\cos\Phi}{\sqrt{1+X^2sen^2\Phi}}) +$$

$$+\cos\Phi\int_0^Y \sqrt{1+\xi^2\,sen^2\Phi}\,\{arc\,tg\,\frac{X - \xi\cos\Phi}{\sqrt{1+\xi^2\,sen^2\Phi}} + arc\,tg\,\frac{\xi\cos\Phi}{\sqrt{1+\xi^2\,sen^2\Phi}}\}d\xi$$



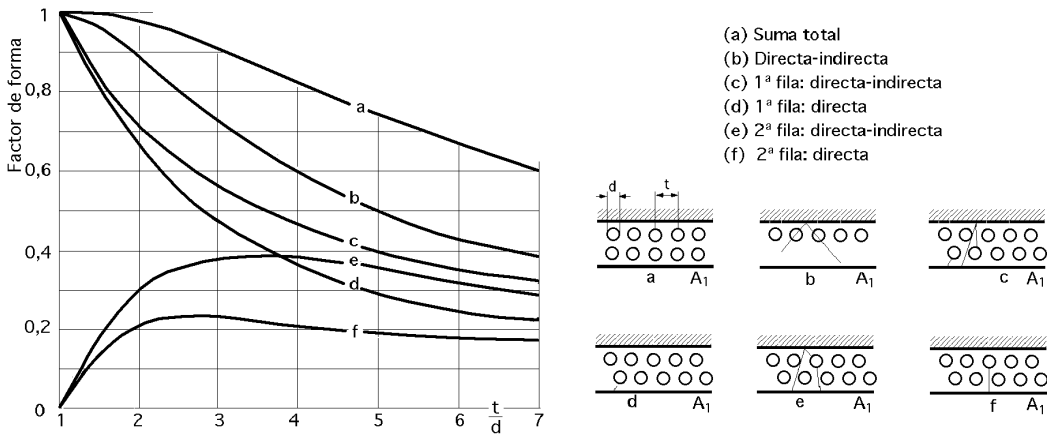


9.- Rectángulo A_1 con cilindro finito A_2

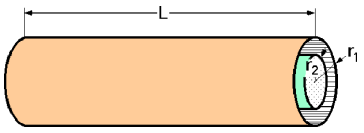


(a/d)	Curva
1,0	a
1,2	b
1,5	c
2,5	d
4,0	e

10.- Plano A_1 con respecto a una o dos filas de tubos paralelas al plano



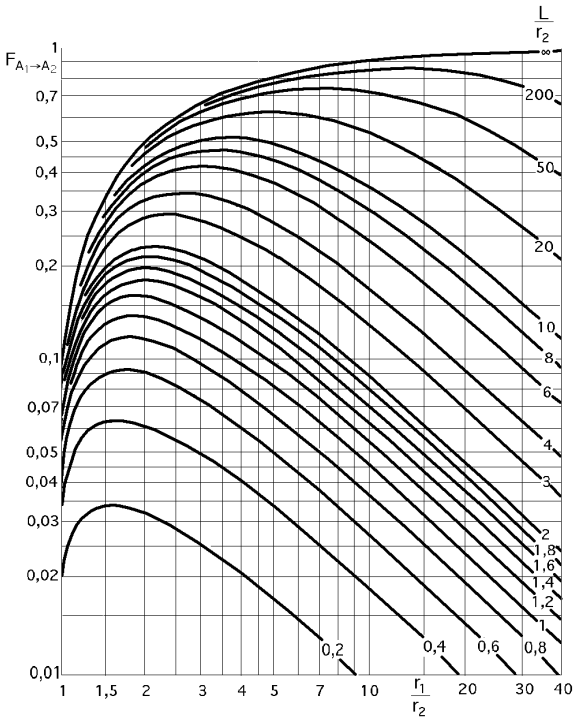
11.- Cilindros coaxiales finitos A_1 exterior, A_2 interior

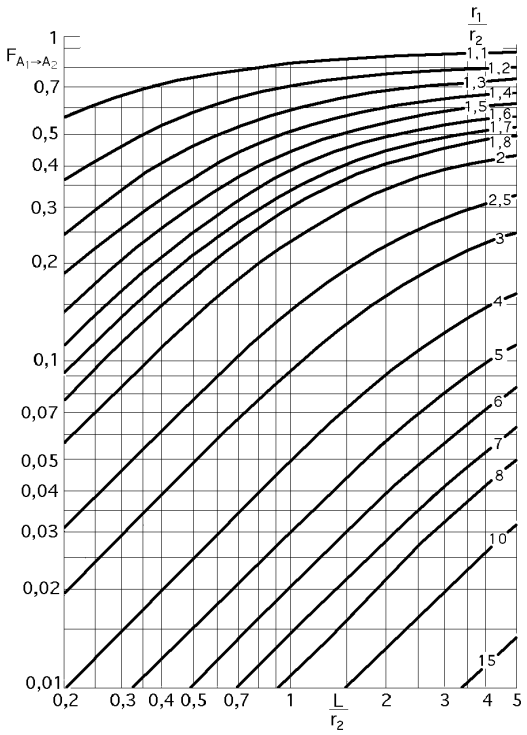


$$X = \frac{r_1}{r_2} \;\; ; \;\; Y = \frac{L}{r_2} \;\; ; \;\; A = Y^2 + X^2 - 1 \;\; ; \;\; A = Y^2 - X^2 + 1$$

$$F_{A_1 \to A_2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{\pi X} \{ arc\ cos\ \frac{B}{A} - \frac{1}{2\,Y} (\sqrt{(A+2)^2 - (2\,X)^2}\ arc\ cos\ \frac{B}{X\,A}) + B\ arc\ sen\ \frac{1}{X} - \frac{\pi\,A}{2} \}$$

$$F_{11} = 1 - \frac{1}{X} + \frac{2}{\pi\,X}\ arc\ tg\ (\frac{2\sqrt{X^2-1}}{Y}) - \frac{Y}{2\,\pi\,X} \{ \frac{\sqrt{4X^2+Y^2}}{Y}\ arc\ sen\ (\frac{4(X^2-1) + \frac{Y^2(X^2-2)}{X^2}}{Y^2 + 4(X^2-1)}) - arc\ sen\ \frac{X^2-2}{X^2} + \frac{\pi}{2} (\frac{\sqrt{4X^2+Y^2}}{Y} - 1) \}$$





XVII.6.- INTERCAMBIO RADIATIVO ENTRE SUPERFICIES NEGRAS

Se supondrá que las superficies están en condiciones de estado estacionario y que todas ellas son negras, difusas e isotermas. Toda superficie no isoterma se subdivide en otras hasta que las más pequeñas estén a una temperatura uniforme.

Asimismo se tendrá en cuenta que el medio que separa las superficies es transparente a la radiación, es decir, ni la emite, ni la absorbe, ni la dispersa; se supondrá que las superficies actúan como emisores y reflectores difusos, que no imponen ninguna restricción, por cuanto un cuerpo negro es siempre una superficie difusa. Con estas condiciones se pueden aplicar las expresiones encontradas para el factor de forma.

Los flujos que intervienen en el proceso térmico de la radiación son:

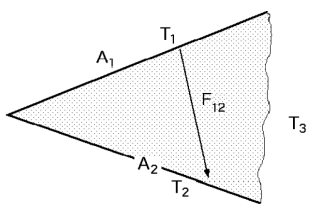


Fig XVII.13.-Dos planos superficies negras y el medio exterior a T_3

$q_{i \to j}$ *es la energía radiante emitida por la superficie i y que es absorbida por la superficie j*

$q_{i(neta)}$ *es la energía que hay que añadir a la superficie i para mantener constante su temperatura*

$q_{i \leftrightarrow j}$ *es el intercambio de energía entre las superficies i y j*

Para evaluar estas energías radiantes consideraremos una geometría sencilla formada por dos superficies negras a T_1 y T_2 y una tercera superficie ficticia a T_3 que representa el medio exterior, conformando entre las tres un recinto, Fig XVII.13.

La energía radiante emitida por la superficie a T_1 que llega a la superficie a T_2 y que es absorbida por ésta, es:

$$q_{1\to2} = A_1 \; F_{12} \; E_{b1}$$

siendo $E_b = \sigma \; T^4$, el poder emisivo total que viene dado por la integral de distribución de Planck para todas las longitudes de onda.

La energía emitida por la superficie a T_2 que es absorbida por la superficie a T_1, es:

$$q_{2\to1} = A_2 \; F_{21} \; E_{b2} = A_1 \; F_{12} \; E_{b2}$$

El intercambio térmico entre las superficies a T_1 y T_2 es la diferencia entre las anteriores, es decir:

$$q_{1\leftrightarrow2} = q_{12} = q_{1\to2} - q_{2\to1} = A_1 \; F_{12} \; E_{b1} - A_1 \; F_{12} \; E_{b2} = A_1 \; F_{12} \; (E_{b1} - E_{b2}) = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{A_1 \; F_{12}}}$$

La expresión $\frac{1}{A_1 \; F_{12}}$ *se denomina resistencia geométrica*

Los potenciales del circuito geométrico son los poderes emisivos del cuerpo negro en ambas superficies. La representación del circuito térmico parcial aplicado a tres superficies se puede poner como se indica en la Fig XVII.14.

La energía neta $q_{1(neta)}$ que se debe aplicar a la superficie A_1 para mantener tanto el régimen estacionario, como la temperatura constante, es la diferencia entre la energía emitida por la superficie A_1 y la absorbida asimismo por A_1 procedente de A_2 y A_3.

La energía emitida por la superficie A_1 *es:* $q_{1(emitida)} = A_1 \; E_{b1}$

La energía absorbida por la superficie A_1 es la procedente de ella misma y de las superficies A_2 y A_3, y es de la forma:

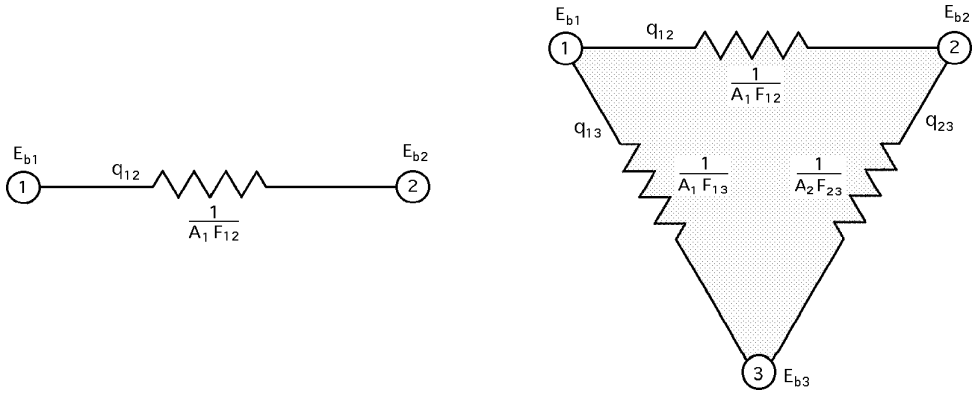


Fig XVII.14.- Analogía de resistencias térmicas

$$q_{1(absorb.)} = q_{11} + q_{21} + q_{31} = A_1\ F_{11}\ E_{b1} + A_2\ F_{21}\ E_{b2} + A_3\ F_{31}\ E_{b3} = A_1\ (F_{11}\ E_{b1} + F_{12}\ E_{b2} + F_{13}\ E_{b3}\ )$$

por lo que:

$$q_{1(neta)} = q_{1(emit)} - q_{1(absorb)} = A_1\ \{E_{b1} - (F_{11}\ E_{b1} + F_{12}\ E_{b2} + F_{13}\ E_{b3}\ )\} = A_1\ \{(\ 1 - F_{11}\ )\ E_{b1} - F_{12}\ E_{b2} - F_{13}\ E_{b3}\ \}$$

De igual manera:

$$\begin{cases} q_{2(neta)} = A_2\ \{-\ F_{21}\ E_{b1} + (\ 1 - F_{22}\ )\ E_{b2} - F_{23}\ E_{b3}\ \} \\ q_{3(neta)} = A_3\ \{-\ F_{31}\ E_{b1} - F_{32}\ E_{b2} + (\ 1 - F_{33}\ )\ E_{b3}\ \} \end{cases}$$

conformando las tres el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} q_{1(neta)} = A_1\ \{(\ 1 - F_{11}\ )\ E_{b1}\ - F_{12}\ E_{b2} - F_{13}\ E_{b3}\ \} \\ q_{2(neta)} = A_2\ \{-\ F_{21}\ E_{b1} + (\ 1 - F_{22}\ )E_{b2} - F_{23}\ E_{b3}\ \} \\ q_{3(neta)} = A_3\ \{-\ F_{31}\ E_{b1} - F_{32}\ E_{b2} + (\ 1 - F_{33}\ )\ E_{b3}\ \} \end{array}\right\}$$

o en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} q_{1(neta)} / A_1 \\ q_{2(neta)} / A_2 \\ q_{3(neta)} / A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - F_{11} & - F_{12} & - F_{13} \\ - F_{21} & 1 - F_{22} & - F_{23} \\ - F_{31} & - F_{32} & 1 - F_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{b1} \\ E_{b2} \\ E_{b3} \end{pmatrix}$$

Los valores de $q_{1(neta)}$, $q_{2(neta)}$ y $q_{3(neta)}$ se pueden incluir en el circuito térmico anterior, mediante una fuente conectada a la unión de los potenciales, Fig XVII.15.

Las ecuaciones anteriores se pueden deducir también a partir del circuito térmico, teniendo en cuenta que en cada nudo, en condiciones estacionarias, el Principio de conservación de la energía implica que la suma de todos los flujos térmicos tiene que ser cero, (Ley de Kirchoff), por lo que:

$$q_{1(\ neta)} = q_{12} + q_{13} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\dfrac{1}{A_1\ F_{12}}} + \frac{E_{b1} - E_{b3}}{\dfrac{1}{A_1\ F_{13}}} = A_1\ F_{12}\ E_{b1} - A_1\ F_{12}\ E_{b2} + A_1\ F_{13}\ E_{b1} - A_1\ F_{13}\ E_{b3} =$$

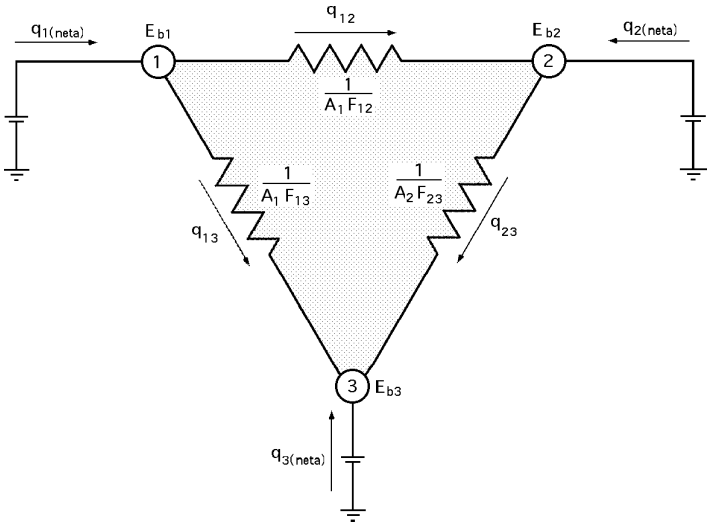


Fig XVII.15.- Circuito térmico para tres superficies negras que conforman un recinto

$$= A_1\ (F_{12} + F_{13})\ E_{b1} - A_1\ F_{12}\ E_{b2}\ - A_1\ F_{13}\ E_{b3} = \left| \begin{array}{l} F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 \\ F_{12} + F_{13} = 1 - F_{11} \end{array} \right| =$$

$$= A_1\ (1 - F_{11})\ E_{b1} - A_1\ F_{12}\ E_{b2} - A_1\ F_{13}\ E_{b3}$$

El valor de $q_{3(neta)}$ es la energía que hay que aplicar a A_3 procedente de A_1 y A_2 para mantener constante su temperatura; como se tiene que:

$$q_{1(neta)} + q_{2(neta)} + q_{3(neta)} = 0$$

$$q_{3(neta)} = - q_{13} - q_{23} = \left| \begin{array}{l} q_{13} = A_1\ F_{13}\ (E_{b1} - E_{b3}) \\ q_{23} = A_2\ F_{23}\ (E_{b2} - E_{b3}) \end{array} \right| = - A_1\ F_{13}\,(E_{b1} - E_{b3}) - A_2\ F_{23}\,(E_{b2} - E_{b3})$$

Esta técnica se puede extender a cualquier número de superficies negras que conformen un recinto; la aplicación de la ley de Kirchoff a circuitos implica en su forma general que:

$$q_{i(neta)} = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\ ,\ con:\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

en la que el término $i = j$ no está incluido en el sumatorio.

La aplicación de la ley de Ohm al circuito térmico proporciona:

$$q_{ij} = \frac{E_{bi} - E_{bj}}{\dfrac{1}{A_i\ F_{ij}}} = A_i\ F_{ij}\ \sigma\ (T_i^4 - T_j^4)$$

XVII.7.- INTERCAMBIO RADIATIVO ENTRE DOS SUPERFICIES NEGRAS Y UNA REFRACTARIA

CONCEPTO DE SUPERFICIE REFRACTARIA.- Cuando el flujo neto de calor sobre una superficie i en un sistema radiativo es cero $q_{i(neta)} = 0$ se dice que esta superficie es refractaria o

también superficie de reirradiación; estas superficies intercambian calor por radiación, y si son despreciables otras formas de transmisión de calor, la energía incidente, o irradiación, es igual a la energía que abandona la superficie, por lo que se pueden considerar como superficies reflectantes perfectas.

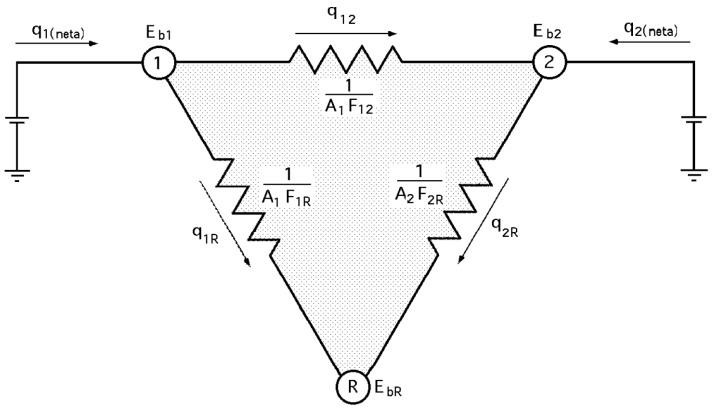


Fig XVII.16
Dos superficies negras A_1 y A_2 y una superficie refractaria R

En la Fig XVII.16 se muestra un circuito formado por dos superficies negras A_1 y A_2 y una superficie refractaria A_R. Se observa que el circuito térmico anterior de tres superficies negras que conforman un recinto, se modifica para tener en cuenta la superficie refractaria haciendo $q_{R(neta)} = 0$, en el punto nodal R correspondiente, que se convierte en un potencial cuya temperatura viene determinada por las temperaturas de las demás superficies participantes, siendo su poder emisivo $E_{bR} = \sigma\ T_R^4$.

Temperatura de la superficie refractaria.- La temperatura T_R de la superficie refractaria se determina a partir del circuito térmico teniendo en cuenta que la superficie refractaria cumple:

$$q_{1R} + q_{2R} = 0 \quad ; \quad q_{1R} = -\,q_{2R} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_{b1} - E_{bR}}{\frac{1}{A_1\ F_{1R}}} = \frac{E_{bR} - E_{b2}}{\frac{1}{A_2\ F_{2R}}} \quad \Rightarrow \quad T_R = \sqrt[4]{\frac{T_1^4\ A_1\ F_{1R} + T_2^4\ A_2\ F_{2R}}{A_1\ F_{1R} + A_2\ F_{2R}}}$$

en la que hay que conocer las temperaturas T_1 y T_2, así como el área de las superficies.

Factor de forma general.- La energía intercambiada entre A_1 y A_2 es la suma de la energía directamente intercambiada entre ellas y de la energía reflejada por la refractaria A_R, es decir:

$$q_{12} = A_1\ E_{b1}\ F_{12}^* - A_2\ E_{b2}\ F_{21}^* = A_1\ F_{12}^* (E_{b1} - E_{b2}) = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{A_1\ F_{12}^*}}$$

Una expresión del factor de forma general F_{12}^* para dos superficies negras (o dos superficies grises), y una refractaria A_R se obtiene a partir de la Fig XVII.17, en la que se han representado los factores de forma correspondientes a las diversas reflexiones en la superficie refractaria, y su incidencia en la superficie negra A_2, a partir del calor emitido por la superficie A_1.

El factor de forma F_{12}^* tiene la siguiente expresión:

$$F_{12}^* = F_{12} + F_{1R}\ F_{R2} + F_{1R}\ F_{RR}\ F_{R2} + F_{1R}\ F_{RR}^2\ F_{R2} + F_{1R}\ F_{RR}^3\ F_{R2} + \ldots =$$

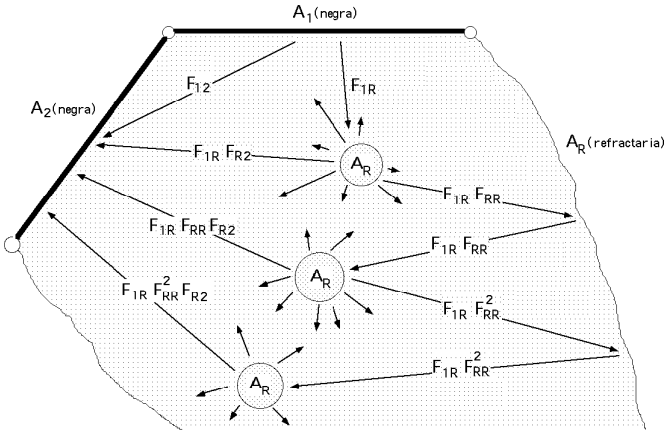


Fig XVII.17.- Esquema para la determinación del factor de forma de dos superficies negras y una refractaria

$$= F_{12} + F_{1R}\ F_{R2}\ (\ 1 + F_{RR} + F_{RR}^2 + F_{RR}^3 + \dots\ ) = F_{12} + F_{1R}\ F_{R2}\ \frac{F_{RR}^n\ F_{RR} - 1}{F_{RR} - 1} = F_{12} + \frac{F_{1R}\ F_{R2}}{1 - F_{RR}} = \left| F_{RR}^n \ \to\ 0 \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 1 = F_{RR} + F_{R1} + F_{R2} \\ \\ 1 - F_{RR} = F_{R1} + F_{R2} = \left\{ \begin{array}{l} A_R\ F_{R1} = A_1\ F_{1R} \ \Rightarrow\ F_{R1} = \dfrac{A_1}{A_R}\ F_{1R} \\ \\ A_R\ F_{R2} = A_2\ F_{2R} \ \Rightarrow\ F_{R2} = \dfrac{A_2}{A_R}\ F_{2R} \end{array} \right\} = \dfrac{A_1}{A_R}\ F_{1R} + \dfrac{A_2}{A_R}\ F_{2R} \end{array} \right| =$$

$$= F_{12} + \frac{F_{1R}\ F_{2R}\ \dfrac{A_2}{A_R}}{F_{1R}\ \dfrac{A_1}{A_R} + F_{2R}\ \dfrac{A_2}{A_R}} = F_{12} + \frac{F_{1R}\ F_{2R}\ A_2}{F_{1R}\ A_1 + F_{2R}\ A_2} = F_{12} + \frac{1}{\dfrac{A_1}{F_{2R}\ A_2} + \dfrac{1}{F_{1R}}}$$

$$q_{12} = A_1\ F_{12}^*\ (E_{b1} - E_{b2}) = A_1\ (F_{12} + \frac{F_{1R}\ F_{R2}}{1 - F_{RR}})\ (E_{b1} - E_{b2}) = A_1\ (F_{12} + \frac{1}{\dfrac{A_1}{F_{2R}\ A_2} + \dfrac{1}{F_{1R}}})\ (E_{b1} - E_{b2})$$

que es lo mismo que considerar el intercambio térmico entre A_1 y A_2 como si no hubiese superficie refractaria, incluyendo el efecto de ésta sobre las dos paredes, que se puede interpretar como una resistencia térmica adicional en paralelo.

Casos particulares.- Para el caso de que las dos superficies negras sean planas o convexas, y el resto refractarias, conformando un recinto, se pueden introducir las siguientes simplificaciones:

a) *Las superficies A_1 y A_2 no se ven a sí mismas*: $F_{11} = 0\ ;\ F_{22} = 0$

$$F_{12}^* = F_{12} + \frac{1}{\dfrac{A_1}{F_{2R}\ A_2} + \dfrac{1}{F_{1R}}} = \left| \begin{array}{l} F_{11} + F_{12} + F_{1R} = 1 \ \ ;\ \ F_{1R} = 1 - F_{12} \\ F_{21} + F_{22} + F_{2R} = 1 \ \ ;\ \ F_{2R} = 1 - F_{21} = 1 - F_{12}\ \dfrac{A_1}{A_2} \end{array} \right| =$$

$$= F_{12} + \frac{1}{\frac{A_1}{A_2 - F_{12}\ A_1} + \frac{1}{1 - F_{12}}} = F_{12} + \frac{A_2 - A_1\ F_{12} - A_2\ F_{12} + A_1\ F_{12}^2}{A_1 + A_2 - 2\ A_1\ F_{12}} = \frac{A_2 - A_1\ F_{12}^2}{A_1 + A_2 - 2\ A_1\ F_{12}}$$

$$q_{12} = A_1\ \frac{A_2 - A_1\ F_{12}^2}{A_1 + A_2 - 2\ A_1\ F_{12}}\ (E_{b1} - E_{b2})$$

b) *Las dos superficies negras no se ven entre sí, ni entre una y otra:* $F_{12} = 0$

$$F_{12}^* = \frac{A_2}{A_1 + A_2} \quad \Rightarrow \quad q_{12} = \frac{A_1\ A_2}{A_1 + A_2}\ (E_{b1} - E_{b2})$$

c) Las dos superficies son además iguales: $A_1 = A_2$

$$F_{12}^* = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad q_{12} = \frac{A_1}{2}\ (E_{b1} - E_{b2})$$

XVII.8.- INTERCAMBIO RADIATIVO ENTRE SUPERFICIES GRISES

Sabemos que cuando una radiación incide sobre una superficie gris, una porción de la radiación se refleja. Para el caso de superficies grises isotermas que conforman un recinto, en régimen estacionario, en el que el medio exterior no participa radiativamente, por considerarle transparente a la radiación, y en el supuesto de que la irradiación en cada superficie se distribuye uniformemente, se aplica la ley de Kirchoff de la radiación que dice:

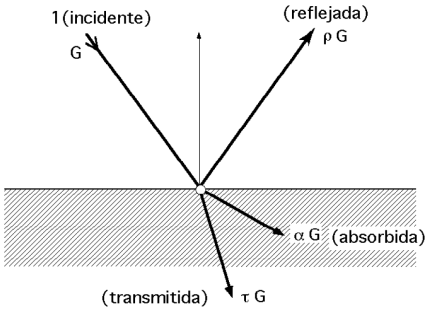


Fig XVII.18.- Balance energético de la radiación sobre un cuerpo gris

En el equilibrio térmico la temperatura permanece constante, por lo que la absortividad α *de una superficie es igual a su emisividad* ε , $(\alpha = \varepsilon)$.

Si además las superficies grises son opacas, su coeficiente de transmisividad es $\tau = 0$ y como se tiene que cumplir el balance energético de la radiación: $\alpha + \rho + \tau = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \varepsilon = 1 - \rho$

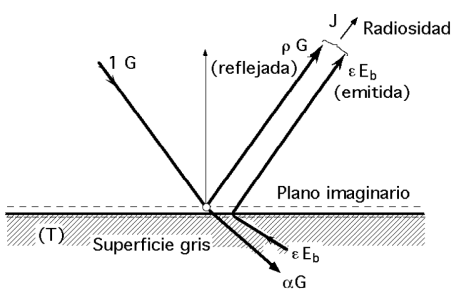


Fig XVII.19.- Balance energético sobre dos planos imaginarios por encima y por debajo de la superficie

Se define la radiosidad J como la energía radiante que abandona la superficie gris, es decir, representa toda la radiación que sale de la superficie y es igual a la suma de la fracción de energía E_b emitida por la superficie debida a su temperatura T y de la irradiación G reflejada por unidad de superficie Fig XVII.19:

$$J = \varepsilon\ E_b + \rho\ G$$

El flujo de calor a través de la superficie se puede expresar de dos maneras distintas:

a) Si se supone un plano imaginario situado a una pequeña distancia por encima de la superficie gris real A_i cuya misión es representar el estado superficial de la misma, como plano reflectante de la radiación incidente, Fig XVII.19, el balance energético sobre este plano (en régimen estacionario) exige que la energía neta que hay que suministrar a la superficie gris para mantener constante su temperatura, sea igual a la diferencia entre la energía J que abandona la superficie y la irradiación G que incide sobre la misma:

$$q_{i(neta)} = A_i\ (J_i - G_i) = \left| \begin{array}{l} J_i = \varepsilon_i\ E_{bi} + \rho_i\ G_i \\ G_i = \dfrac{J_i - \varepsilon_i\ E_{bi}}{\rho_i} \end{array} \right| = A_i\ (J_i - \frac{J_i - \varepsilon_i\ E_{bi}}{\rho_i}) = A_i\ \frac{J_i\ (\rho_i - 1) + \varepsilon_i\ E_{bi}}{\rho_i} =$$

$$= \left| \varepsilon = 1 - \rho \right| = A_i\ \frac{-J_i\ \varepsilon_i + \varepsilon_i\ E_{bi}}{\rho_i} = \frac{E_{bi} - J_i}{\dfrac{\rho_i}{A_i\ \varepsilon_i}} = \frac{\varepsilon_i}{\rho_i}\ (E_{bi} - J_i)\ A_i$$

Si esta ecuación se considera en forma de la ley de Ohm, el denominador es una resistencia térmica de radiación que separa los potenciales E_{bi} y J_i, tal como se indica en la Fig XVII.20.

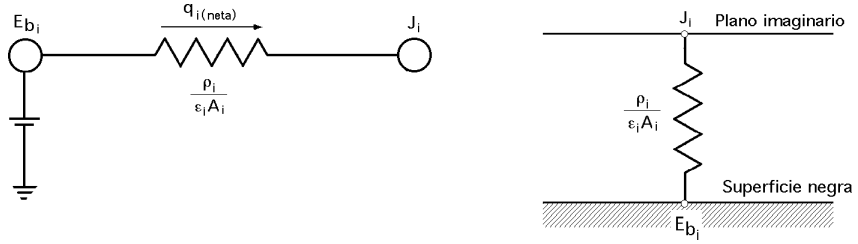


Fig XVII.20.- Resistencia superficial de una superficie gris

La resistencia es debida al hecho de que la superficie gris refleja una fracción de la radiación incidente, por lo que equivale a una resistencia superficial que se añade al circuito térmico para superficies negras y que explica el intercambio radiativo entre superficies grises. La estructura básica del circuito desarrollado para superficies negras permanece invariable cuando se trabaja con superficies grises, por cuanto las resistencias son función únicamente de la geometría de las superficies y no de sus propiedades físicas superficiales.

La temperatura del cuerpo gris viene dada por: $T_i = \sqrt[4]{\dfrac{\dfrac{\rho_i}{A_i\ \varepsilon_i}\ q_{i(neta)} + J_i}{\sigma}}$

b) Si se supone un segundo plano imaginario por debajo de la superficie gris real, Fig XVII.19, e infinitamente próximo a élla, como la absorción y la emisión ocurren bajo la misma, se tiene:

$$q_{i(\ neta)} = A_i\ (\ \varepsilon_i\ E_{bi} - \alpha_i\ G_i\ ) = \left| \varepsilon_i = \alpha_i \right| = A_i\ \varepsilon_i\ (E_{bi} - G_i\ )$$

SUPERFICIES REFRACTARIAS.- El concepto de superficie refractaria $q_{R(neta)} = 0$ incluye que ésta no tiene pérdidas térmicas al exterior. Teniendo presente el circuito térmico representado en la Fig XVII.21 para tres superficies grises que conforman un recinto, y el concepto de superficie gris, resulta evidente que:

$$\left.\begin{array}{l} q_{R(neta)} = A_R\,(J_R - G_R) = 0 \\ q_{R(neta)} = A_R\ \varepsilon_R\,(E_{bR} - G_R) = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad J_R = G_R = E_{bR}$$

por lo que en una superficie refractaria, el poder emisivo del cuerpo negro E_{bR}, la radiosidad J_R y la irradiación G_R, son magnitudes iguales.

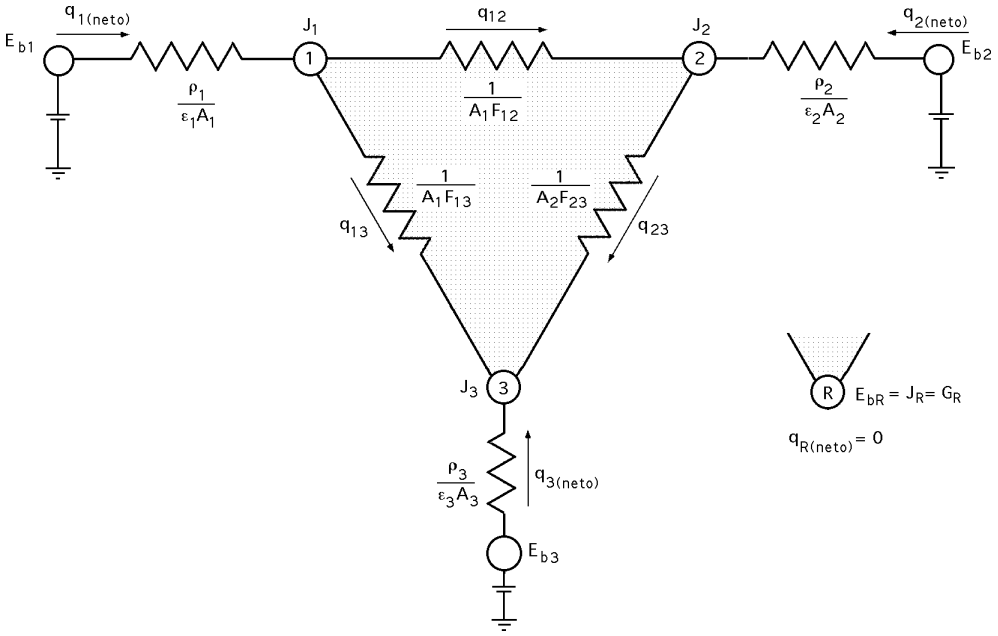


Fig XVII.21.- Circuito térmico de tres superficies grises que conforman un recinto

Una superficie refractaria refleja toda la energía incidente sin absorber nada de ésta, es decir es una superficie perfectamente reflectora, que alcanza una temperatura de equilibrio que viene determinada por la temperatura de las otras superficies que conforman el recinto.

La temperatura de la superficie refractaria es:

$$A_R\,(\varepsilon_R\ \sigma\ T_R^4 - \alpha_R\ G_R) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_R = \sqrt[4]{\frac{\alpha_R\ G_R}{\varepsilon_R\ \sigma}}$$

RECINTO FORMADO POR DOS SUPERFICIES GRISES, DIFUSAS Y OPACAS.- Un problema muy general es aquel en el que intervienen sólo dos superficies grises, difusas y opacas que forman un recinto, Fig XVII.22, en las que $F_{12} = 1$.

Esto implica que el medio exterior 3 que separa las superficies, no interviene en el circuito térmico ya que como $F_{11} = 0$, resulta que $F_{13} = 0$, siendo de aplicación a los siguientes casos:

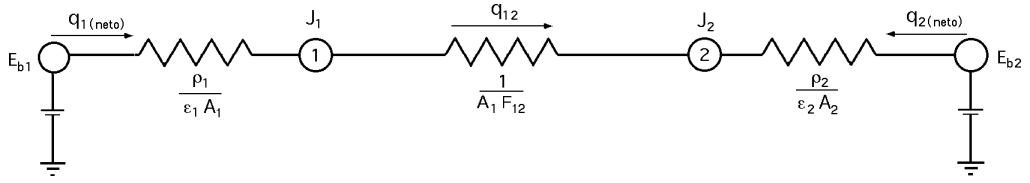


Fig XVII.22.- Circuito térmico de dos superficies grises que conforman un recinto con $F_{13} = 0$

- Dos placas paralelas infinitamente anchas

- Dos cilindros concéntricos largos, o dos esferas concéntricas

- Un cuerpo pequeño rodeado por una gran superficie cerrada

El recinto térmico requiere: $q_{1(neta)} = q_{12} = - q_{2(neta)}$

$$q_{1(neta)} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{\rho_1}{\varepsilon_1 A_1}} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{\rho_2}{\varepsilon_2 A_2}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{\rho_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{\rho_2}{\varepsilon_2 A_2}}$$

Aplicándola a los casos citados, y teniendo en cuenta que $(\rho = 1 - \varepsilon)$, se obtiene:

1) Dos placas paralelas infinitas de igual área: $A_1 = A_2$; $F_{12} = 1$

$$q_{1(neta)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{\rho_1}{\varepsilon_1} + 1 + \frac{\rho_2}{\varepsilon_2}} A_1 = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + 1 + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2}} A_1 = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} A_1$$

2) Dos cilindros concéntricos largos, el interior de superficie A_1 y el exterior de superficie A_2, o dos esferas concéntricas, $F_{12} = 1$

$$q_{1(neta)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{\rho_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1} + \frac{\rho_2}{\varepsilon_2 A_2}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{\rho_1}{\varepsilon_1} + 1 + \frac{\rho_2 A_1}{\varepsilon_2 A_2}} A_1 = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + 1 + \frac{\rho_2 A_1}{\varepsilon_2 A_2}} A_1 = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{\rho_2 A_1}{\varepsilon_2 A_2}} A_1$$

3) Un cuerpo pequeño A_1 rodeado por una gran superficie cerrada, $A_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = 0$; $F_{12} = 1$

RECINTO FORMADO POR DOS SUPERFICIES GRISES ESPECULARES.- El cálculo del intercambio radiativo cuando algunas de las superficies son especulares puede ser complicado, salvo que la geometría del sistema sea sencilla.

$$q_{1(neta)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{\rho_2 A_1}{\varepsilon_2 A_2}} A_1 = \left| \frac{A_1}{A_2} = 0 \right| = \varepsilon_1 A_1 (E_{b1} - E_{b2})$$

- Dos placas paralelas infinitamente anchas.- En este caso toda la radiación reflejada por una de las paredes llega directamente a la otra, sin importar si la radiación es difusa o especu-

lar, por lo que la expresión anteriormente hallada para superficies difusas es perfectamente válida:

$$q_{1(neta)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} A_1$$

- Dos cilindros concéntricos largos*, el interior de superficie A_1 y el exterior de superficie A_2 o* ***dos esferas concéntricas****, $F_{12} = 1$.*

a) Cuando la superficie interior es especular y la exterior no, (o cuando las dos superficies sean difusas), es válida la ecuación:

$$q_{12} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{\rho_2 \; A_1}{\varepsilon_2 \; A_2}} A_1$$

b) Cuando la superficie exterior es especular y la interior es difusa (o especular) Fig XVII.23, se obtiene otro resultado en base a las siguientes consideraciones:

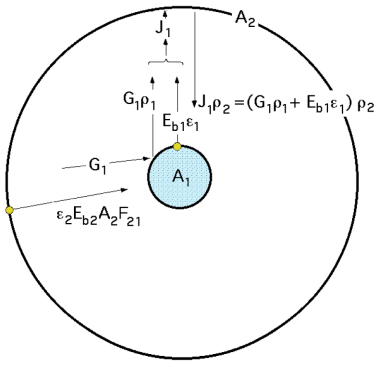


Fig XVII.23
Reflexión sobre dos cilindros especulares

La radiación que incide sobre A_1 es *$(A_1 G_1)$*, y consta de dos sumandos:

b1) La radiación emitida por la superficie A_2 que llega a la superficie A_1:

$$\varepsilon_2 \; E_{b2} \; A_2 \; F_{21} = \varepsilon_2 \; E_{b2} \; A_1 \; F_{12} = \left| F_{12} = 1 \right| = \varepsilon_2 \; E_{b2} \; A_1$$

b2) La radiación J_1 que sale de A_1 y que reflejada por A_2 vuelve a A_1:

$$J_1 \; A_1 \; \rho_2 = (\varepsilon_1 \; E_{b1} + \rho_1 \; G_1) \; A_1 \; \rho_2$$

Por lo tanto, la radiación G_1 que incide sobre A_1 es:

$$A_1 \; G_1 = \varepsilon_2 \; E_{b2} \; A_1 + A_1 (\varepsilon_1 \; E_{b1} + \rho_1 \; G_1) \; \rho_2 \quad \Rightarrow \quad G_1 = \frac{\varepsilon_2 \; E_{b2} + \varepsilon_1 \; E_{b1} \; \rho_2}{1 - \rho_1 \; \rho_2}$$

$$q_{1(neta)} = A_1 \; \varepsilon_1 \; (E_{b1} - G_1) = A_1 \; \varepsilon_1 \; \left(E_{b1} - \frac{\varepsilon_2 \; E_{b2} + \varepsilon_1 \; E_{b1} \; \rho_2}{1 - \rho_1 \; \rho_2}\right) = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} A_1$$

que es un resultado idéntico al de placas paralelas infinitas de igual área.

RECINTO FORMADO POR DOS SUPERFICIES GRISES, DIFUSAS Y OPACAS, Y VARIAS PANTALLAS DE RADIACIÓN.- La radiación térmica entre dos superficies grises $A_1 =$

A_2 difusas y opacas que forman un recinto con $F_{12} = 1$, se reduce notoriamente si se interpone entre ellas una pantalla de protección de la radiación, superficie A_3, construida con un material de baja ε, cuya misión es incrementar la resistencia térmica de la radiación entre las superficies A_1 y A_2.

a) Placas paralelas infinitas de igual área: $A_1 = A_2 = A_3 = A$; $F_{12} = 0$; $F_{13} = F_{32} = 1$

Si ε_{31} y ε_{32} son las emisividades del material de baja emisividad de la pantalla respecto a las superficies A_1 y A_2 , y $F_{13} = F_{32} = 1$, se tiene, Fig XVII.24:

$$q_{1(neta)} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A}} = \frac{J_1 - J_{31}}{\frac{1}{A F_{13}}} = \frac{J_{31} - E_{b3}}{\frac{1 - \varepsilon_{31}}{\varepsilon_{31} A}} = \frac{E_{b3} - J_{32}}{\frac{1 - \varepsilon_{32}}{\varepsilon_{32} A}} = \frac{J_{32} - J_2}{\frac{1}{A F_{32}}} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A}} =$$

$$= \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_{31}}{\varepsilon_{31}} + \frac{1 - \varepsilon_{32}}{\varepsilon_{32}} + \frac{1}{\varepsilon_2}} A = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1) + (\frac{1}{\varepsilon_{31}} + \frac{1}{\varepsilon_{32}} - 1)} A$$

Si $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_3$, resulta : $q_{1(neta)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 2\,\frac{1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3}} A$

Si las emisividades de todas las superficies son iguales $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = \varepsilon$, por lo que:

$$q_{1(neta)(1)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{2\,(\frac{2}{\varepsilon} - 1)} A \quad \xrightarrow{\text{y para N pantallas protectoras}} \quad q_{1(neta)(N)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{(N + 1)\,(\frac{2}{\varepsilon} - 1)} A$$

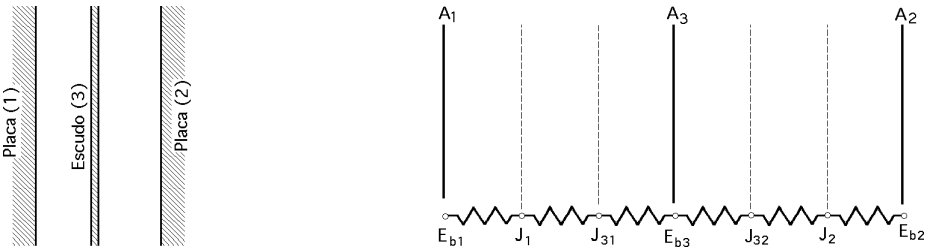


Fig XVII.24.- Placas paralelas infinitas de igual área y pantalla de radiación

Para el caso particular de que las superficies fuesen negras $(\varepsilon = 1)$ se tiene:

Sin pantalla: $q_{1(neta)(0)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{1} A$

Con 1 pantalla: $q_{1(neta)(1)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{2} A$

Con N pantallas: $q_{1(neta)(N)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{N + 1} A$

observándose que en este caso el efecto de la placa reduce a la mitad el intercambio de energía, por

lo que a la pantalla se la llama *escudo de radiación*

Comparando el caso de N pantallas de radiación, con el de dos placas planas paralelas infinitas de igual área, $A_1 = A_2$, y $F_{12} = 1$, sin pantallas de radiación, resulta:

$$\frac{q_{1(neta)(N)}}{q_{1(neta)(0)}} = \frac{1}{N+1}$$

b) Dos cilindros concéntricos largos, uno A_1 dentro del otro A_2 , o dos esferas concéntricas opacas, con una pantalla de radiación de superficie A_3 entre los dos cilindros o entre las dos esferas $\Rightarrow$ $F_{12} = 0$, *siendo las emisividades de la pantalla de radiación* ε_{31} *y* ε_{32} , *y los factores de forma:*

$$F_{11} + F_{13} = 1 \quad ; \quad F_{11} = 0 \quad ; \quad F_{13} = 1$$

$$F_{32} + F_{33} = 1 \quad ; \quad F_{33} = 0 \quad ; \quad F_{32} = 1$$

La transferencia de calor por radiación que atraviesa estas superficies, pantalla incluida, se determina mediante la ecuación:

$$q_{1(neta)} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}} = \frac{J_1 - J_{31}}{\frac{1}{A_1 F_{13}}} = \frac{J_{31} - E_{b3}}{\frac{1-\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{31} A_3}} = \frac{E_{b3} - J_{32}}{\frac{1-\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{32} A_3}} = \frac{J_{32} - J_2}{\frac{1}{A_3 F_{32}}} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} =$$

$$= \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{\varepsilon_1} + (\frac{1}{\varepsilon_2} - 1)\frac{A_1}{A_2} + (\frac{1}{\varepsilon_{31}} + \frac{1}{\varepsilon_{32}} - 1)\frac{A_1}{A_3}} A_1$$

Una aplicación interesante es el cálculo de las pérdidas de calor $q_{1(neta)}$ de un termopar, utilizado para medir la temperatura de un flujo de gases calientes que circulan en régimen estacionario por el interior de un conducto cilíndrico A_2; el termopar A_1 está recubierto por una funda cilíndrica A_3, que le proteje de la radiación, Fig XVII.25; despreciando efectos de borde, y teniendo en cuenta que $F_{13} = F_{32} = 1$ se tiene:

$$q_{1(neta)} = q_{13} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}} = \frac{J_1 - J_{31}}{\frac{1}{F_{13} A_1}} = \frac{J_{31} - E_{b3}}{\frac{1-\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{31} A_3}} = \frac{E_{b1} - E_{b3}}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_3}(\frac{1}{\varepsilon_{31}} - 1)} A_1$$

$$q_{1(neta)} = q_{32} = \frac{E_{b3} - J_{32}}{\frac{1-\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{32} A_3}} = \frac{J_{32} - J_2}{\frac{1}{F_{32} A_3}} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} = \frac{E_{b3} - E_{b2}}{\frac{1}{\varepsilon_{32}} + \frac{A_3}{A_2}(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1)} A_3$$

$$q_{1(neta)} = q_{12} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_3}(\frac{1}{\varepsilon_{31}} - 1) + \frac{A_1}{\varepsilon_{32} A_3} + \frac{A_1}{A_2}(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1)} A_1$$

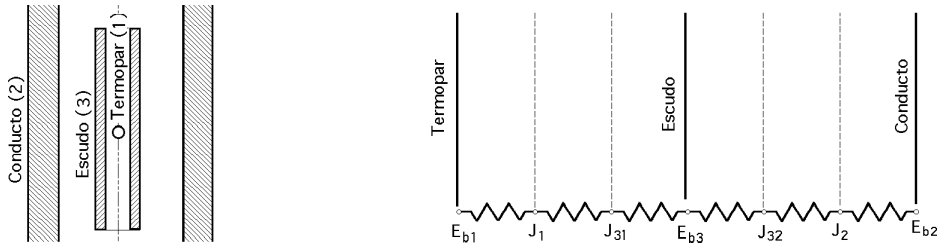


Fig XVII.25.- Termopar protegido por una funda

El valor de $q_{1(neta)}$ es también la energía intercambiada por convección entre el flujo de gases a T_F y el termopar, observándose que las pérdidas de calor por radiación dependen del tamaño A_3 del termopar y de la emisividad del material de la funda protectora ε_{31} y ε_{32}.

RECINTO FORMADO POR TRES SUPERFICIES GRISES, dos opacas y una refractaria.- La *temperatura de equilibrio de la superficie refractaria*, que junto con otras dos superficies grises conforman un recinto, se obtiene a partir de:

$$q_{R(neta)} = q_{R1} + q_{R2} = 0 \quad ; \quad q_{1R} = q_{R2} \quad \Rightarrow \quad \frac{J_1 - E_{bR}}{\frac{1}{A_1 F_{1R}}} = \frac{E_{bR} - J_2}{\frac{1}{A_2 F_{2R}}} \quad con: E_{bR} = \sigma T_R^4$$

$$T_R = \sqrt[4]{\frac{J_1 A_1 F_{1R} + J_2 A_2 F_{2R}}{\sigma (A_1 F_{1R} + A_2 F_{2R})}}$$

Si de las tres superficies grises dos son opacas y la tercera refractaria, el circuito térmico correspondiente es el representado en la Fig XVII.26. La conservación de la energía en la superficie refractaria R requiere:

$$q_{1(neta)} + q_{2(neta)} + q_{R(neta)} = 0 \quad ; \quad q_{R(neta)} = 0 \quad ; \quad q_{1(neta)} + q_{2(neta)} = 0 \quad ; \quad q_{1(neta)} = -\, q_{2(neta)}$$

$$q_{1(neta)} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{\rho_1}{\varepsilon_1 A_1}} = \frac{J_1 - J_2}{R_{equiv}} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{\rho_2}{\varepsilon_2 A_2}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{\rho_1}{\varepsilon_1 A_1} + R_{equiv} + \frac{\rho_2}{\varepsilon_2 A_2}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{\rho_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}^*} + \frac{\rho_2}{\varepsilon_2 A_2}}$$

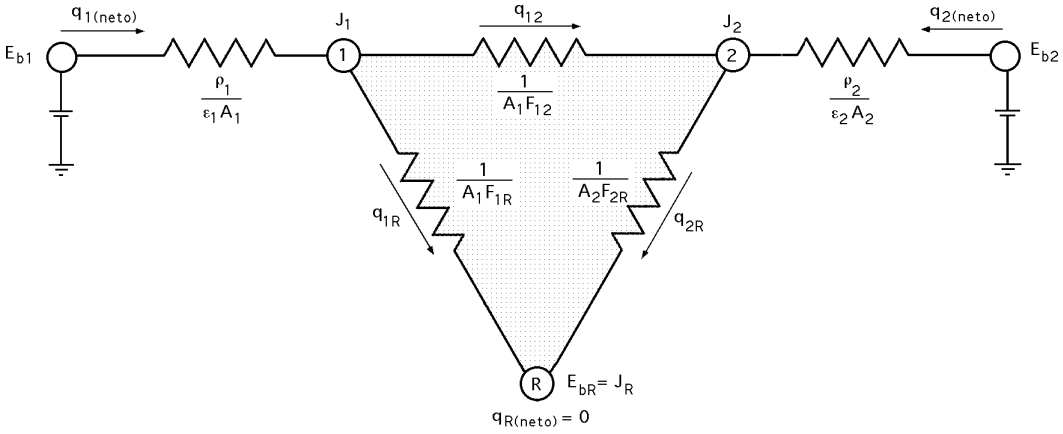


Fig XVII.26.- Circuito térmico de dos superficies grises y una refractaria que conforman un recinto

$$\text{en las que:} \begin{cases} F_{12}^{*} = F_{12} + \dfrac{F_{13}\ F_{32}}{1 - F_{33}}\ , \ \textit{con (3) superficie refractaria} \\ \dfrac{1}{R_{equiv}} = \dfrac{1}{R_{12}} + \dfrac{1}{R_{13} + R_{23}} = \dfrac{R_{12} + R_{13} + R_{23}}{R_{12}\,(R_{13} + R_{23})} \quad \Rightarrow \quad R_{equiv} = \dfrac{R_{12}\,(R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \end{cases}$$

$$R_{equiv} = \frac{\dfrac{1}{A_1\ F_{12}}\left(\dfrac{1}{A_1\ F_{13}} + \dfrac{1}{A_2\ F_{23}}\right)}{\dfrac{1}{A_1\ F_{12}} + \dfrac{1}{A_1\ F_{13}} + \dfrac{1}{A_2\ F_{23}}} = \frac{\dfrac{F_{12}}{F_{13}} + \dfrac{A_1\ F_{12}}{A_2\ F_{23}}}{1 + \dfrac{F_{12}}{F_{13}} + \dfrac{A_1\ F_{12}}{A_2\ F_{23}}}\ \frac{1}{A_1\ F_{12}} = \left| X = \frac{F_{12}}{F_{13}} + \frac{A_1\ F_{12}}{A_2\ F_{23}} \right| = \frac{X}{1+X}\ \frac{1}{A_1\ F_{12}}$$

$$q_{1(neta)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\dfrac{\rho_1}{\varepsilon_1\ A_1} + \dfrac{X}{1+X}\ \dfrac{1}{A_1\ F_{12}} + \dfrac{\rho_2}{\varepsilon_2\ A_2}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\dfrac{\rho_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{X}{1+X}\ \dfrac{1}{F_{12}} + \dfrac{\rho_2\ A_1}{\varepsilon_2\ A_2}}\ A_1$$

XVII.9.- TÉCNICAS MATRICIALES

Cuando un problema de radiación incluye un número de superficies participantes superior a cuatro, los flujos de calor o las temperaturas de las superficies se determinan mediante cálculo matricial, en donde el número de superficies no influye prácticamente en el trabajo requerido para su resolución, reduciéndose el problema a determinar la matriz inversa de una dada.

Las ecuaciones matriciales que se utilizan son de dos tipos: $\begin{cases} \textit{Superficies con temperaturas conocidas} \\ \textit{Superficies con flujo de calor conocidos} \end{cases}$

a) ***SUPERFICIES CON TEMPERATURAS CONOCIDAS***.- Para organizar las ecuaciones en forma matricial se supone que se conocen todas las temperaturas de las superficies y que lo que se pretende es calcular los flujos netos de calor para todas ellas; asimismo hay que recordar que todas las superficies son opacas, grises e isotermas, y que la distribución de la energía radiante sobre las mismas es uniforme.

Para simplificar el método matricial consideraremos sólo tres superficies; la radiación incidente G_1 sobre la superficie A_1 es debida a la radiosidad que sale de dicha superficie e incide sobre sí misma (ya que se puede suponer cóncava), más la radiosidad que incide sobre A_1 procedente de las otras dos superficies que conforman el recinto; el circuito térmico para este caso es el indicado en la Fig XVII.9, en el que el flujo neto de calor para cada superficie es:

$$\left.\begin{aligned} q_{i(neta)} &= A_i\ (J_i - G_i) \\ q_{i(neta)} &= \frac{E_{bi} - J_i}{\dfrac{\rho_i}{A_i\ \varepsilon_i}} = \frac{\varepsilon_i}{\rho_i}\,(E_{bi} - J_i)\,A_i \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon_i}{\rho_i}\,(E_{bi} - J_i)\,A_i = (J_i - G_i)\,A_i \quad \Rightarrow \quad J_i\left(1 + \frac{\varepsilon_i}{\rho_i}\right) = \frac{\varepsilon_i}{\rho_i}\,E_{bi} + G_i$$

Para la superficie A_1 se tiene:

$$A_1\ G_1 = A_1\ F_{11}\ J_1 + A_2\ F_{21}\ J_2 + A_3\ F_{31}\ J_3\ + ... = A_1\ F_{11}\ J_1 + A_1\ F_{12}\ J_2 + A_1\ F_{13}\ J_3\ + ...$$

$$G_1 = F_{11}\ J_1 + F_{12}\ J_2 + F_{13}\ J_3 + ...$$

y sustituyendo en la anterior *(i = 1)* resulta:

$$J_1 (1 + \frac{\varepsilon_1}{\rho_1}) = \frac{\varepsilon_1}{\rho_1} E_{b1} + G_1 = \frac{\varepsilon_1}{\rho_1} E_{b1} + (F_{11}\ J_1 + F_{12}\ J_2 + F_{13}\ J_3 + ...)$$

$$(1 - F_{11} + \frac{\varepsilon_1}{\rho_1})\ J_1 + (- F_{12}) J_2 + (- F_{13}) J_3 = \frac{\varepsilon_1}{\rho_1} E_{b1}$$

obteniéndose para las superficies A_2 y A_3:

$$\textit{Superficie } A_2\text{:}\quad (- F_{21}) J_1 + (1 - F_{22} + \frac{\varepsilon_2}{\rho_2})\ J_2 + (- F_{23}) J_3 = \frac{\varepsilon_2}{\rho_2} E_{b2}$$

$$\textit{Superficie } A_3\text{:}\quad (- F_{31}) J_1 + (- F_{32}) J_2 + (1 - F_{33} + \frac{\varepsilon_3}{\rho_3})\ J_3 = \frac{\varepsilon_3}{\rho_3} E_{b3}$$

ecuaciones que se pueden resumir en la forma matricial siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 - F_{11} + (\varepsilon_1 / \rho_1) & - F_{12} & - F_{13} \\ - F_{21} & 1 - F_{22} + (\varepsilon_2 / \rho_2) & - F_{23} \\ - F_{31} & - F_{32} & 1 - F_{33} + (\varepsilon_3 / \rho_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varepsilon_1 / \rho_1) E_{b1} \\ (\varepsilon_2 / \rho_2) E_{b2} \\ (\varepsilon_3 / \rho_3) E_{b3} \end{pmatrix}$$

Para el caso general de *n* superficies que conforman un recinto, A es una matriz de (*n.n*) elementos, de la forma:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \textit{Diagonal principal: } a_{ii} = 1 - F_{ii} + \dfrac{\varepsilon_i}{\rho_i} \ ; \ \ i = j \\ \textit{Fuera de la diagonal principal: } a_{ij} = - F_{ij} \ ; \ \ i \neq j \end{cases}$$

Las matrices columna J *y* B *están formadas por n elementos:* $\mathsf{J} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ ... \\ J_n \end{pmatrix}$; $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$

Los elementos de la matriz B *son de la forma:* $b_i = \dfrac{\varepsilon_i\ E_{bi}}{\rho_i}$ *, pudiéndose poner que:* $A\,J = B$

Cuando una superficie A_i del recinto sea refractaria, $(\rho_i = 1;\ \varepsilon_i = 0), \Rightarrow \dfrac{\varepsilon_i}{\rho_i} = 0$, la ecuación correspondiente es:

$$(1 - F_{ii}) J_i + (- F_{i2}) J_2 + (- F_{i3}) J_3 + ... + (- F_{in}) J_n = 0$$

Cuando una superficie A_i del recinto sea negra, se cumple $J_i = E_{bi}$, siendo los elementos de las matrices A y B del cuerpo negro:

$a_{ij} = 0\ ,\ (i \neq j)\ \ ;\ \ a_{ii} = 1\ \ ;\ \ b_i = E_{bi}$

Si la superficie A_1 es gris, la A_2 negra y la A_3 refractaria, la matriz correspondiente es*:*

$$\begin{pmatrix} 1 - F_{11} + (\varepsilon_1 / \rho_1\ ) & - F_{12} & - F_{1R} \\ 0 & 1 & 0 \\ - F_{R1} & - F_{R2} & 1 - F_{RR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varepsilon_1 / \rho_1\ ) E_{b1} \\ E_{b2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si se tienen dos superficies negras conectadas por una rerradiante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ - F_{R1} & - F_{R2} & 1 - F_{RR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{b1} \\ E_{b2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz J (que determinan los valores de la irradiación J_i sobre todas las superficies) se obtienen a partir de la ecuación $J = C\ B$, que se puede escribir en la forma:

$$\left.\begin{array}{l} J_1 = c_{11}\ b_1 + c_{12}\ b_2 + \ldots + c_{1n}\ b_n \\ J_2 = c_{21}\ b_1 + c_{22}\ b_2 + \ldots + c_{2n}\ b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ J_n = c_{n1}\ b_1 + c_{n2}\ b_2 + \ldots + c_{nn}\ b_n \end{array}\right\}$$

El flujo neto de calor en una superficie gris es: $q_{i(neta)_{sup.\ gris}} = \dfrac{\varepsilon_i}{\rho_i}\ (E_{bi} - J_i\ )\ A_i$

El flujo neto de calor en una superficie negra A_i, teniendo en cuenta que $J_i = E_{bi}$, es:

$$q_{i(\ neta\ )_{sup.\ negra}} = (E_{bi} - \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij}\ E_{bj}\ )\ A_i = (J_i\ - \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij}\ J_j\ )\ A_i = (J_i - G_i\ )\ A_i$$

b) ***SUPERFICIES CON FLUJO NETO DE CALOR CONOCIDO.-*** Si las temperaturas de todas las superficies que conforman el recinto se suponen desconocidas, pero se conocen los flujos netos de calor de todas ellas, la ecuación:

$$q_{1(\ neta\ )} = J_1\ A_1 - (F_{11}\ J_1 + F_{12}\ J_2 + F_{13}\ J_3\ )\ A_1 = \{(\ 1 - F_{11}\ )\ J_1 + F_{12}\ J_2 + F_{13}\ J_3\ \}\ A_1$$

se puede poner en función de magnitudes conocidas despejando la incógnita E_{b1} y manteniendo el valor conocido $q_{1(neta)}$.

La forma matricial para tres superficies grises A_1, A_2 y A_3, que conforman un recinto es:

$$\left.\begin{array}{c} (1 - F_{11}\ )\ J_1 - F_{12}\ J_2 - F_{13}\ J_3 = q_{1(neta)} / A_1 \\ - F_{21}\ F_1 + (1 - F_{22}\ )\ J_2 - F_{23}\ J_3 = q_{2(neta)} / A_2 \\ - F_{31}\ J_1 - F_{32}\ J_2 + (1 - F_{33}\ )\ J_3 = q_{3(neta)} / A_3 \end{array}\right\} \ \Rightarrow\ \begin{pmatrix} 1 - F_{11} & - F_{12} & - F_{13} \\ - F_{21} & 1 - F_{22} & - F_{23} \\ - F_{31} & - F_{32} & 1 - F_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1(\ neta\ )} / A_1 \\ q_{2(\ neta\ )} / A_2 \\ q_{3(\ neta\ )} / A_3 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz A *son de la forma:* $\begin{cases} \text{Fuera de la diagonal principal: } a_{ij} = - F_{ij} \;\; ; \;\; i \neq j \\ \text{En la diagonal principal: } a_{ii} = 1 - F_{ii} \end{cases}$

Los elementos de la matriz B *son de la forma:* $\frac{q_{i(neta)}}{A_i}$

Determinados los elementos de A y B se calcula la matriz C inversa de la matriz A; los elementos de la matriz radiosidad J vienen determinados por la ecuación $J = C\ B$, mientras que las temperaturas de las superficies pueden determinarse a partir de la ecuación:

$$q_{i(neta)} = \frac{\varepsilon_i}{\rho_i} (E_{bi} - J_i) A_i \quad ; \quad E_{bi} = \frac{\rho_i}{\varepsilon_i\ A_i} q_{i(neta)} + J_i = \sigma\ T_i^4 \quad \Rightarrow \quad T_i = \sqrt[4]{\frac{\frac{\rho_i}{\varepsilon_i\ A_i} q_{i(neta)} + J_i}{\sigma}}$$

Si la superficie A_i fuese un cuerpo negro $\rho_i = 0$, su temperatura sería: $T_i = \sqrt[4]{\frac{J_i}{\sigma}}$